Série $n°3$: Vecteurs

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement le Professeur **Mamadou Aliou Diallo, servant au lycée de Karang de Foundiougne**, pour m'avoir confié cette série d'exercices afin de les partager avec mes élèves. Son engagement envers l'éducation et sa contribution sont grandement appréciés.

Exercice 1:

1 On donne $\overrightarrow{MP} = -4\overrightarrow{MN}$. Compléter :

$$\overrightarrow{NM} = \ldots \quad ; \quad \overrightarrow{NP} = \ldots \quad ; \quad \overrightarrow{PN} = \ldots \quad ; \quad \overrightarrow{PM} = \ldots$$

2 On donne : $\overrightarrow{SU} = \frac{6}{5}\overrightarrow{ST}$. Compléter :

$$\overrightarrow{TU} = \ldots \quad ; \quad \overrightarrow{TS} = \ldots \quad ; \quad \overrightarrow{UT} = \ldots \quad ; \quad \overrightarrow{US} = \ldots \quad ; \quad \overrightarrow{ST} = \ldots \quad ; \quad \overrightarrow{TU} = \ldots$$

Exercice 2:

Soient un triangle ABC et les points I et J tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$:

1 Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2 Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3 Démontrer que les droites (IC) et (BJ) sont parallèles.

Exercice 3:

Soit ABC un triangle.

1 Construis les points D et E tels que $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$.

2 Démontrer que le point C est le milieu du segment $[AD]$.

3 Soient A, B, C et D quatre points tels que $3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$. Montrer que les points B, C et D sont alignés.

Exercice 4:

Soient A, B et C trois points non alignés.

1 Construire les points D et E tels que :

- $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$,
- $\overrightarrow{CE} = -2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

2 Démontrer que les droites (DE) et (CA) sont parallèles.

Exercice 5:

Soient A, B et C trois points distincts.

1 Construire D et E tels que $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

2 Montrer que D est le milieu du segment $[AE]$.

Exercice 6:

Soit ABC un triangle quelconque.

1 Construire les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

2 Démontrer que (MN) et (BC) sont parallèles.

3 Soient S et T les milieux respectifs de $[BC]$ et $[MN]$. Démontrer que les points A, S et T sont alignés.

Exercice 7:

Soient A et B deux points tels que $AB = 4$ cm. Soit N le point tel que $3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BN}$ et P le milieu de $[AB]$.

1 Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AN}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2 Faire une figure et placer les points N et P.

3 Démontrer, à laide de vecteurs, que A est le milieu de $[NP]$.

Exercice 8:

EFG est un triangle. Les points P et R sont les milieux respectifs de $[EF]$ et $[PG]$. S est le point tel que $\overrightarrow{GS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GF}$.

1 Faire une figure.

2 Démontrer que les points E, R et S sont alignés.

Exercice 9:

Soit un parallélogramme $ABCD$. On note E et F les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[DC]$. Les points I, J, G, et H sont respectivement définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{DJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}, \quad \overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

1 Montrer que $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{FJ}$.

2 En déduire :

- la nature du quadrilatère $IEJF$,
- que les droites (IJ) et (EF) sont sécantes en un point K.

3 Montrer que :

$$\overrightarrow{GI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{JH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

4 En déduire que $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{JH}$ puis la nature du quadrilatère $GIHJ$.

Exercice 10:

On considère un parallélogramme $ABCD$. I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$. À tout réel $t \neq 0$, on associe les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BN} = t\overrightarrow{BC}.$$

E est le milieu de $[MN]$.

1 Démontrer que :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IE} = \frac{t}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

2 En déduire que les points I, E, et J sont alignés.

Exercice 11:

ABC est un triangle, O un point quelconque, G et P les points tels que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}.$$

1 Faire une figure.

2 Montrer que $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}$.

3 Montrer que les droites (OP) et (CG) sont parallèles.

Exercice 12:

Soit ABC un triangle quelconque.

1 Construire A' milieu de $[BC]$ et G, le centre de gravité de ABC.

2 On considère les points D, E, et I définis par :

- I est le milieu du segment $[DE]$,
- $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,
- $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Faire une figure complète.

3 Démontrer que A, A', et I sont alignés.

4 Démontrer que G est le milieu de $[AI]$.

5 Démontrer que A' est le milieu de $[GI]$.

Exercice 13:

Soit ABC un triangle quelconque non aplati. Soient I le milieu de $[AB]$, J le symétrique de C par rapport à A, et K le point tel que :

$$\overrightarrow{KB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{KC}.$$

1 Montrer que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

2 Faire la figure.

3 Exprimer $\overrightarrow{IK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$.

4 Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$.

5 En déduire que les points K, I, et J sont alignés.

6 On note M le point du plan tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

a Placer M, puis exprimer $\overrightarrow{CM}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$.

b En déduire que les droites (CM) et (IK) sont parallèles.

Exercice 14:

Soit ABC un triangle.

1 Construire les points D, E, et F tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}, \quad \text{et } F \text{ le milieu du segment } [AC].$$

2 On donne $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{FE}$.

a Montrer que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

b Montrer que les points A, E, et D sont alignés.

3 Le point M est tel que $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$. Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, puis construire le point M.

4 Placer le point K, symétrique de F par rapport à C. Montrer que :

$$\overrightarrow{KA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{KD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}.$$

5 En déduire la nature du quadrilatère $AMDK$.