Série $n°2$: Polynômes

Exercice 1:

Soit le polynôme $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 2x - 3$

1 Vérifier que -1 est une racine de P

2 Déterminer trois réels a, b et c tel que $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$

3 Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$

Exercice 2:

I-Répondre par Vrai ou Faux. Puis Jusitfier
Soient les polynômes $P(x) = x^3 - 3x + 2$ et $Q(x) = 4x^5 - 3x^4 + x^2$

1 1 est racine commune des deux polynômes P et Q

2 Le degré du polynôme $P(x) + Q(x)$ est égal à 8.

3 Le degré du polynôme $P(x) \times Q(x)$ est égal à 15

II- Pour chaque proposition, trouver la seule bonne réponse :

1 Soit $f(x) = x^3 - 4x^2 + |x| - 1$,$x \in \mathbb{R}$ est une fonction :

a Polynôme | b Rationnelle | c Ni polynôme,ni rationnelle

2 Soit P, Q et R trois polynômes tel que $P(x) = Q(x) \times R(x)$ si $\deg P = 5$ et $\deg Q = 2$ alors $\deg(R) = ?$

a 10 | b 7 | c 3

3 Le polynôme $3x^3 - 6x^2 + x + 2$ est factorisable par :

a $x - 1$ | b $x + 1$ | c $x - 2$

4 Soit $f(x) = \frac{2x+3}{2x^2+8}$, la domaine de définition de f est :

a $\mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$ | b $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ | c $\mathbb{R}$

III. Quel est le degré du polynôme nul ? Comment appelle-t-on les polynômes dont le degré est égal à 0?

Exercice 3:

Soient les polynômes $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ et $Q(x) = x^2 + x - 6$

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ léquation $Q(x) = 0$

2
a Montrer que 2 est une racine de $P(x) = 0$
b Déterminer trois réels a, b et c tel que $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$
c Résoudre dans $\mathbb{R}$ léquation $P(x) = 0$

3 Résoudre dans R léquation $P(x) = Q(x)$

4 Soit la fonction définie par :$\frac{P(x)}{Q(x)}$

a Déterminer le domaine de définition de f
b Simplifier lexpression de $f(x)$
c Résoudre dans $\mathbb{R}$ linéquation $f(x) \geq 0$

Exercice 4 :

Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$

1 Déterminer trois réels a ,b et c tel que $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$

2 Résoudre léquation $P(x) = 0$

3 Dresser le tableau de signe de $P(x)$

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ linéquation $P(x) \leq 0$

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ linéquation $\frac{1}{P(x)} \geq 0$

Exercice 5 :

On donne $P(x) = ax^3 + 5x^2 - bx - 6$ où a et b sont des réels.

1 Déterminer a et b tels que $P(x)$ soit divisible par $(x-2)$ et par $(x+1)$

2 Factoriser $P(x)$ en produit de facteurs de premier degré.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a $P(x) = 0$

b $P(x) = x - 6$

c $P(1+2x) = 0$

d $P(x) \leqslant 0$

Exercice 5 :

On considère les polynômes A et P définis par : $A(x) = 4x^4 - 13x^3 + 9$ et $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$

1 a Factoriser le trinôme $4x^2 - 13x + 9$

b En déduire la factorisation de $A(x)$ en produits de quatre facteurs

2 a Vérifier que (-1) est une racine de P

b En déduire que $P(x) = (x+1) \times R(x)$ où R est un polynôme que l'on déterminera

3 Soit la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{A(x)}{P(x)}$

a Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f puis simplifier $f(x)$

b Résoudre dans $f(x) \geq 0$ puis $\sqrt{f(x)} = 2\sqrt{x-1}$

Exercice 6:

Soit le polynôme $P(x) = -2x^4 + 2x^3 + 26x^2 - 2x - 24$

1 Montrer que 1 et -3 sont des racines de P

2 Déterminer un polynôme Q tel que $P(x) = (x-1)(x+3)Q(x)$

3 On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{P(x)}{-2x^2-x+15}$

a Déterminer le domaine de définition D de f

b Simplifier $f(x)$

c Résoudre alors l'inéquation $f(x) \geq 0$

Exercice 7:

1 Soit $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

a Vérifier que -2 est une racine de f

b Déduire que $f(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont des réels à déterminer

c Résoudre dans $\mathbb{R}$,$f(x) \geq 0$

d Déduire le domaine de définition de $R(x) = \sqrt{f(x)}$

2 a Développer et réduire le polynôme $(x+a)(x^2+1)$

b Factoriser alors $g(x) = x^3 + 2x^2 + x - 2$

3 Soit $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

a Déterminer le domaine de définition de la fonction h

b Montrer que $x \in \mathbb{R}$ on a : $h(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2+1}$

c Résoudre dans $\mathbb{R}$,$h(x) \leq 1$

Exercice 8 :

1 Déterminer le signe du polynôme $P(x) = x^2 + x + 1$

2 Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = \sqrt{(x^2 + x + 1)}$

3 Montrer que f^2 est un polynôme de degré 2

4 En déduire que si f est un polynôme, alors son degré est égale à 1

5 Montrer quils existent pas de réels a et b tel que, pour tout réel x : $\sqrt{(x^2 + x + 1)} = ax + b$

Exercice 9:

Soit le polynôme $P(x) = \frac{x(x+1)}{2}$

1 Montrer que pour tout réel x on a : $P(x) - P(x-1) = x$

2 En déduire de ce qui précède $A = 1 + 2 + 3 + 4$ et $B = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

3 Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 10:

Soit le polynôme $h(x) = x^4 - 6x^2 + 8$.

1 Calculer $h(-2)$ et $h(2)$. En déduire que $h(x)$ a quatre racines x_1, x_2, x_3 et x_4 que l'on précisera.

2 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{h(x)} + \frac{x}{x^2-4}$

a Déterminer l'ensemble de définition de f.

b Factoriser le polynôme $P(x) = x^3 - 2x + 1$

c Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geq 0$.

3 Trouver les réels a, b, c et d tels que : $\frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2} + \frac{c}{x-x_3} + \frac{d}{x-x_4}$.

Exercice 11:

Soit b, c, d et e des nombres réels et a un nombre réel non nul et f le polynôme définie pour définie pour tout réel x par : $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

1 On considère la propriété (P) suivante : **pour tout nombre réel x non nul,** $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^4}$.

a Démontrer que si f vérifie la propriété (P), et si α est une racine de f, alors $\frac{1}{\alpha}$ est également une racine de f.

b Démontrer que f vérifie la propriété (P) si et seulement si : $\begin{cases} a = e \\ b = d \end{cases}$

En déduire que 0 n'est pas une racine de f.

2 Soit le polynôme H défini par $H(x) = 3x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.
Montrer que l'équation $H(x) = 0 \iff (E) : 3X^2 - 8X - 3 = 0$ où $X = x + \frac{1}{x}$.
Résoudre (E) puis en déduire les racines de $H(x)$.