Série $n°2$: Polynômes

Exercice 1

I-Répondre par Vrai ou Faux. Puis Jusitfier
Soient les polynômes $P(x) = x^3 - 3x + 2$ et $Q(x) = 4x^5 - 3x^4 + x^2$

1. 1 est racine commune des deux polynômes P et Q
2. Le degré du polynôme $P(x) + Q(x)$ est égal à 8.
3. Le degré du polynôme $P(x) \times Q(x)$ est égal à 15

II- Pour chaque proposition, trouver la seule bonne réponse :

1. Soit $f(x) = x^3 - 4x^2 + |x| - 1$,$x \in \mathbb{R}$ est une fonction :

   a) Polynôme | b) Rationnelle | c) Ni polynôme ni rationnelle

2. Soit P, Q et R trois polynômes tel que $P(x) = Q(x) \times R(x)$ si $\deg P = 5$ et $\deg Q = 2$ alors $\deg(R) = ?$

   a) 10 | b) 7 | c) 3

3. Le polynôme $3x^3 - 6x^2 + x + 2$ est factorisable par :

   a) $x - 1$ | b) $x + 1$ | c) $x - 2$

4. Soit $f(x) = \frac{2x+3}{2x^2+8}$, la domaine de définition de f est :

   a) $\mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$ | b) $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ | c) $\mathbb{R}$

III. Quel est le degré du polynôme nul ? Comment appelle-t-on les polynômes dont le degré est égal à 0 ?

Exercice 2

1. Soit $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
   a) Vérifier que -2 est une racine de f
   b) Déduire que $f(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont des réels à déterminer
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$,$f(x) \geq 0$
   d) Déduire le domaine de définition de $R(x) = \sqrt{f(x)}$
2. a) Développer et réduire le polynôme $(x + a)(x^2 + 1)$
   b) Factoriser alors $g(x) = x^3 + 2x^2 + x - 2$
3. Soit $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
   a) Déterminer le domaine de définition de la fonction h
   b) Montrer que $x \in \mathbb{R}$ on a : $h(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2+1}$
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}$,$h(x) \leq 1$

Exercice 3

On considère le polynôme $P(x) = (m^2 - m - 2)x^3 - (m + 1)x^2 + (m - 2)x + 2m - 1$
Déterminer le réel m pour que :

1. $d^0P = 3$ | 2. $d^0P = 2$ | 3. $d^0P = 1$

Exercice 4

1. Déterminer le signe du polynôme $P(x) = x^2 + x + 1$
2. Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = \sqrt{(x^2 + x + 1)}$

3 Montrer que f^2 est un polynôme de degré 2

4 En déduire que si f est un polynôme, alors son degré est égale à 1

5 Montrer quils existent pas de réels a et b tel que, pour tout réel x : $\sqrt{(x^2+x+1)} = ax+b$

Exercice 5

Les questions sont dans une large mesure tous indépendantes

1 Calculer la somme des coefficients du polynôme :

$$P(x) = (1-x+x^2)^3(1+3x-x^2)^2$$

2 Démontrer que $\sqrt{1+x+x^4}$ n'est pas un polynôme.

Exercice 6

Soit le polynôme P défini par : $P(x) = \frac{x(x-b)(x-c)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{x(x-c)(x-a)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{x(x-a)(x-b)}{c(c-a)(c-b)}$.
Calculer $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$ puis simplifier l'écriture de $P(x)$.

Exercice 7

Soit le polynôme P défini par : $P(x) = A\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + B\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + C\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

1 Vérifier que $P(a) = A$, $P(b) = B$ et $P(c) = C$.

2 Soit le polynôme Q défini par $Q(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

a Quel est le dégré maximal de Q?

b Déduire de 1) que le polynôme $R(x) = Q(x) - 1$ admet trois racines distinctes.

c Que peut-on en déduire pour Q.

Exercice 8

Soit le polynôme $h(x) = x^4 - 6x^2 + 8$.

1 Calculer $h(-2)$ et $h(2)$. En déduire que $h(x)$ a quatre racines x_1, x_2, x_3 et x_4 que l'on précisera.

2 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{h(x)} + \frac{x}{x^2-4}$

a Déterminer l'ensemble de définition de f.

b Factoriser le polynôme $P(x) = x^3 - 2x + 1$

c Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geq 0$.

3 Trouver les réels a, b, c et d tels que : $\dfrac{a}{x-x_1} + \dfrac{b}{x-x_2} + \dfrac{c}{x-x_3} + \dfrac{d}{x-x_4}$.

Exercice 9

1 Former un polynôme $P(x)$ du 3$^{\text{e}}$ degré tel que, pour toute valeur de x, on ait : $P(x) - P(x-1) = x^2$.

2 En déduire une expression de la somme : $S_2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

3 Même question pour un polynôme du 4$^{\text{e}}$ degré tel que : $P(x) - P(x-1) = x^3$.
Déterminer $S_3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.
Calculer de la même façon : $S_4 = 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4$.

Exercice 10

1 Déterminer les réels a et b pour que le polynôme $P(x) = ax^7 + bx^6 + 1$ soit divisible par $(x-1)^2$ puis factoriser $P(x)$ par $(x-1)^2$.

2 Déterminer les réels a et b de façon que le polynôme $ax^{n+1} + bx^n + 1$ soit divisible par $(x+1)^2$.

3 Démontrer que $P(x) = (x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$ est divisible par $(x-1)(x^2-1)$.

Exercice 11

Soit $P(x)$ un polynôme dont les restes respectifs de la division euclidienne par $x+1$ et $x-3$ sont respectivement 4 et -4.

1 Déterminer le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x+1)(x-3)$

2 Soit $A(x)$ et $B(x)$ le quotient et le reste de la division de $P(x^3)$ par x^3+1

a Déterminer le polynôme $B(x)$

b Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $A(x)$ par (x^3+1)

Exercice 12

1 Démontrons que le polynôme $P(x) = x^n - n(x-1) - 1$ est divisible par $(x-1)^2$.

2 Soit f_n le polynôme défini par $f_n(x) = (x-2)^{2n} + (x-1)^n - 1, \ n \geq 2$.
Montrer que $f_n(x) = (x-2)(x-1)Q_n(x)$ où Q_n est un polynôme à expliciter.

3 Montrer que pour tout entier naturel, $(x-1)^2$ divisible $nx^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + (n+2)x - n$.
Déterminer le quotient pour $n \in \{1; 2; 3\}$

Exercice 13

1 Soit le polynôme $P(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2^x - 1, n \in \mathbb{N}^*$.
Factoriser $Q_n(x) = 2x^3 + 3x^2 + x$ puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(x)$ est divisible par $Q(x)$.

2 Un polynôme $L(x)$ divisé séparément par $(x-2)$ et $(x+1)$, donne respectivement pour reste 4 et 7.
Soit $R(x)$ son reste par sa division euclidienne par le produit $(x-2)(x+1)$.

a Expliquer pourquoi on peut écrire $R(x) = ax + b$ où a et b sont deux réels fixés.

b Déterminer alors a et b.

3 Un polynôme p divisé séparément par $(x-1)$, par $(x-2)$ et par $(x+2)$ donnent respectivement comme reste 6; 18; -3. Quel reste donnera t-il si on le divise par le produit $(x-1)(x-2)(x+2)$.

Exercice 14

1 Déterminer a et b pour que le polynôme $x^5 + ax^4 + b$ soit factorisable par $(x-1)^2$.

2 Pour quelles valeurs de n le polynôme $x^n - a^n$ est-il factorisable par $(x+a)$? Trouver le quotient.

3 Pour quelles valeurs de n le polynôme $x^n + a^n$ est-il factorisable par $(x+a)$? Trouver le quotient.

4 Démontrer que le polynôme $(x+a+b)^3 - x^3 - a^3 - b^3$ est factorisable par le polynôme $(x+a)(x+b)(a+b)$.

Exercice 15

Vérifier que $1 - x^n = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1})$

1 Montrer que le polynôme $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ (où $n \in \mathbb{N}$) est factorisable par $(x-1)$

2 Soient a et b deux entiers naturels tels que $b = a+1$

a Démontrer que pour tout entier naturel strictement positif n, $a^2 + b^{2n} - 1$ est divisible par ab

b En déduire un diviseur de $121 + 12^{2022} - 1$

3 Soient $P(x)$ et $q(x)$ deux polynômes tels que $q(x) = p(x) + 1$

a Démontrer que $[p(x)]^{2n} + [q(x)]^n - 1$ est factorisable par $q(x).p(x)$

b) En déduire que $(x-2)^{2n}+(x-1)^n-1$ est factorisable par $(x-2)(x-1)$

4. Montrer que $p(x)=(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1$ est factorisable par $q(x)=x(x+1)(2x+1)$
Expliciter $r(x)$ tel que $p(x)=q(x)r(x)$

Plusieurs méthodes existent pour la résolution des questions précédentes, efforcez-vous d'en trouver au moins deux.

Exercice 16

Soit b, c, d et e des nombres réels et a un nombre réel non nul et f le polynôme définie pour définie pour tout réel x par : $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$.

1. On considère la propriété (P) suivante : pour tout nombre réel x non nul, $f(\frac{1}{x})=\frac{f(x)}{x^4}$.
   a) Démontrer que si f vérifie la propriété (P), et si α est une racine de f, alors $\frac{1}{\alpha}$ est également une racine de f.
   b) Démontrer que f vérifie la propriété (P) si et seulement si : $\begin{cases} a = e \\ b = d \end{cases}$
   En déduire que 0 n'est pas une racine de f.
2. Soit le polynôme H défini par $H(x)=3x^4-8x^3+3x^2-8x+3$.
Montrer que l'équation $H(x)=0 \iff (E): 3X^2-8X-3=0$ où $X=x+\frac{1}{x}$.
Résoudre (E) puis en déduire les racines de $H(x)$.

Exercice 17

On se propose de résoudre une équation du troisième degré ne possédant pas, à priori, de solution particulière.

1. Soit le polynôme $P(x)=10x^3-9x^2+9x+1$.
   a) On pose $x=y+h$. Déterminer le polynôme $Q(y)$ obtenu en remplaçant x par $y+h$ dans $P(x)$.
   b) Déterminer h de façon que $Q(y)=10(y^3+\alpha y+\beta)$ où α et β sont deux réels que l'on déterminera.
2. Cette partie a pour but de déterminer les racines de $Q(y)$.
   a) Déterminer deux réels b et c tels que : $\beta=b^3+c^3$ et $\alpha=-3bc$.
   b) Prouver que $y^3+b^3+c^3-3ybc$ est factorisable par $y+b+c$. Effectuer alors cette factorisation.
   c) Terminer la résolution de l'équation $P(x)=0$.

Exercice 18: Polynômes symétriques

On appelle **polynôme symétrique** un polynôme dont les coefficients peuvent se lire indifféremment dans un sens comme dans lautre.
Exemple: $f(x)=3x^4+x^3-x^2+x+3$.
Nous allons voir des méthodes permettant de résoudre l'équation $f(x)=0$

1. **Degré 2:** Soit $f(x)=ax^2+bx+a, a\neq 0$
Résoudre $f(x)=0$ et dans le cas où f admet deux racines distinctes, les comparer.
2. **Degré 3:** Soit $f(x)=ax^3+bx^2+bx+a, a\neq 0$
   a) Montrer que 0 n'est pas racine de f et qui si x_1 est une racine de f, alors $\frac{1}{x_1}$ est aussi racine de f.
   b) Trouver une racine evidente de f et en déduire une factorisation de $f(x)$.
   c) Discuter le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$
   d) **Application:** Soit $f(x)=7x^3-43x^2-43x+7$
   Résoudre l'équation $f(x)=0$ et factoriser $f(x)$.
3. **Degré 4:** Soit $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a, a\neq 0$
   a) Montrer que 0 n'est pas racine de f
   b) Montrer qui si x_1 est une racine de f, alors $\frac{1}{x_1}$ est aussi racine de f.

4 Soit $y = x + \frac{1}{x}$

(a) Déterminer l'expression de $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ en fontion de $a, b, c, y \quad et \quad y^2$

(b) Montrer que $f(x) = 0$ revient à résoudre successivement deux équations du second degré.

(c) Montrer que si $b^2 < 4a(c - 2a)$, $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

(d) **Application:** Résoudre l'équation :

$$12x^4 + 11x^3 - 146x^2 + 11x + 12$$

Exercice 19: Clin d'oeil à l'Ultimate Challenge

Soit $m \neq 0$ et u deux entiers relatifs, on dit que m est un diviseur de u si et seulement si: il existe un entier relatif k tel que $u = km$. Par exemple 2 est un diviseur de 6 car $6 = 2\times = 3$, en particulier si m est un diviseur de u alors $-m$ est aussi un diviseur de u. Par exemple comme 2 est un diviseur de 6 alors -2 l'est aussi; en effet $6 = (-2)(-3)$.

Soit le polynôme $P(x) = x^3 + sx^2 + tx + u$ et α, β et γ ses trois racines (Nous admettons que ces racines existent).

1 (a) Rappeler l'expression factorisée de $P(x)$.

(b) En déduire une expression de $\alpha + \beta + \gamma, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ et $\alpha\beta\gamma$ en fonction de s, t et u.

2 Soit m un entier relatif non nul. On suppose que m est une racine de $P(x)$, on suppose de plus que s, t et u sont des entiers relatifs.

(a) Justifier que: $u = -m^3 - sm^2 - tm$.

(b) En déduire m est un diviseur de u.

(c) Dans le cas où $u = 1$, préciser les valeurs possibles de l'entier relatif m.

3 Soit a, b et c trois entiers relatifs, $A = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$ et $B = \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c}$.
On suppose A et B sont des entiers relatifs et on se propose de déterminer leurs valeurs.

(a) A l'aide de 1 former le polynôme de degré 3 admettant $\dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{c}$ et $\dfrac{c}{a}$ comme racines.

(b) En déduire à l'aide de (c) les valeurs possibles de $\dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{c}$ et $\dfrac{c}{a}$. Vérifier que $|a| = |b| = |c|$.

(c) Quelles sont les valeurs de A et B.

Recommandation

La plupart des exercices proposés dans nos series et dans celle-ci, sont corrigés dans le fascicule que nous avons confectionnés **Exercices de Fitness Pro**. *Nous vous le recommandons vivement, voici un extrait* https://bit.ly/37IJzC1
Disponible :https://axloutoth.sn/produit/fascicule-de-maths-1ere-s1-s3/.