| AXLOU TOTH POUR L'INNOVATION | SÉRIE D'EXERCICES N°10 | ENCADREURS : M. DIALLO &M. SARR |
|---|---|---|
| COURS D'EXCELLENCE D'ENCADREMENT SCIENTIFIQUE | ANGLES ORIENTÉS | NIVEAU : PREMIÈRE S1-S3 |

**Exercice 1 :**

Le plan est orienté est orientés dans le sens direct. Soit (C) le cercle trigonométrique ; M et N deux points de (C) et $\beta$ une mesure en radian de l' arc orienté $\widehat{MN}$. Trouver dans chacun des cas suivants la mesure qui appartient à $[0; 2\pi]$ $\beta = \frac{17\pi}{2}$ ; $\beta = -\frac{26\pi}{3}$ ; $\beta = \frac{509\pi}{15}$ ; $\beta = \frac{2009\pi}{4}$

**Exercice 2 :**

Soit $[Ox) et\ [Oy)$deux demi-droites et $\alpha$ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{Ox}\,;\overrightarrow{Oy})$ en radians.

1) Dans chacun des cas suivants ; donner la mesure principale et la plus petite mesure positive de l'angle $(\overrightarrow{Ox}\,;\overrightarrow{Oy})$ : $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ ; $\alpha = \frac{27\pi}{4}$ ; $\alpha = -\frac{43\pi}{3}$ ; $\alpha = \frac{412\pi}{4}$ ; $\alpha = \frac{-24\pi}{6}$
2) Soit A et B deux points respectifs de $[Ox)\ et\ [Oy)$ donner la mesure en degré, de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ pour chacun des cas précédents.

**Exercice 3 :**

On considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$ et $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{3}$

1) Faire une figure.

2) En utilisant la relation de Chasles, prouver que :

$$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$$

3) En déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ .

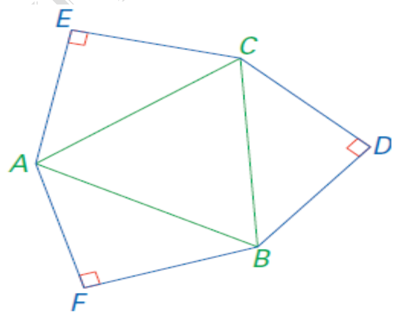
**Exercice 4 :**

1) Soit $(\vec{u}\,;\vec{v}) = -\dfrac{\pi}{9}$ $et$ $(\vec{u}\,;\vec{w}) = \dfrac{\pi}{4}$ .Déterminer la mesure principale de :

   $a)$ $(\vec{u}\,;\vec{w})$ ;$b)$ $(-\vec{u}\,;\vec{v})$ ;$c)$ $(-\vec{v}\,;-2\vec{w})$ ;$d)$ $(-2\vec{u}\,;\vec{w})$

2) Dans la figure suivante, ABC est un triangle équilatéral direct, CBD ; ACE et AFB sont des triangles rectangles et isocèles respectivement en D, E et F.
   Déterminer la mesure principale des angles suivant :

   $(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AE})$ ; $(\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{BF})$ ; $(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{AC})$ ; $(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{CA})$ ; $(\overrightarrow{EA}\,;\overrightarrow{CB})$




**Exercice 4 :**

1) ABC est un triangle équilatéral. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Calcule les lignes trigonométriques de 60° et 30°
2) Calculer les lignes trigonométriques de 45° en vous appuyant sur un triangle bien choisi.
3) Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O\,,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ ,on considère le cercle trigonométrique de centre O.
   a) Placer sur le cercle trigonométrique les points images respectives des angles de mesures principales : $\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{-3\pi}{4};\pi;-\pi$
   b) Déterminer les lignes trigonométriques de ces angles.

**Exercice 5 :**

Soit $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ deux cercles sécantes en A et B de centre respectifs $O$ et $O'$ tels que : $(\overrightarrow{AO'}, \overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ .Soit $M$ un point de $(\mathcal{C})$ distinct distinct de A et B tel que la droite (MA) recoupe $(\mathcal{C}')$ en C et (MB) recoupe $(\mathcal{C}')$ en D.

1) Que représente (AO') pour $(\mathcal{C})$ ? En déduire que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{AO'}, \overrightarrow{AB})[\pi]$ .

Démontrer de même que : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})[\pi]$ .

2) Montrer que les points C et D sont diamétralement opposés.

**Exercice 6 :**

Soit $ABCD$ un carré direct, et $E\ et\ F$ les points tels que $ABE$ et $BCF$ soit équilatéraux et directs.
("Direct " signifie qu'on respect l'ordre des point dans le sens direct)
Le but de cet exercice va être de montrer que D, E et F sont alignés.

**1) a)** Déterminer la nature du triangle $DEA$ puis une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE})$

**b)** En déduire une mesure de l'angle$(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC})$

**2)** Déterminer la nature du triangle $CDF$ puis une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DC})$

**3)** Montrer que $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) = 0[\pi]$. Conclure.

**Exercice 7 :**

1) Soit $k \in \mathbb{Z}$ . Placer, sur le cercle trigonométriques d'origine $I$ les points $M, N\ et\ Q$ tels que :
$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{27\pi}{6} + 2k\pi$ ; $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}) = \frac{38\pi}{3} + 2k\pi$ ; $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OQ}) = x\ avec\ 3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ;
2) Soir $(C)$ un cercle de centre $A$ et $B$ un point de $(C)$
   a. Construire les points $C, D, E\ et\ F$ du cercle $(C)$ tels que :
   $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ ; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{3\pi}{4}$ ; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \frac{7\pi}{6}$ ; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) = \frac{3\pi}{4}$
   b. Déterminer une mesure puis la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :
   $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ ; $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF})$ ; $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC})$ ; $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE})$.

**Exercice 8 :**

$ACE$ est un triangle isocèle direct en $A$ et tel que $AC = 5$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

1) Tracez le triangle équilatéral direct $AEF$ et le triangle $ABC$ isocèle rectangle direct en $A$.
2) Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :
$(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB})$ ; $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BC})$ ; $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{CB})$ ; $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EC})$

**Exercice 9 :**

$A\ et\ B$ sont deux points distincts du plan.
Représenter l'ensemble des points $M$ du plan dans chacun des cas suivants :

**a)** $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ **b)** $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ **c)** $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

**d)** $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}\ [\pi]$ **e)** $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ **f)** $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi\ [2\pi]$

**i)** $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ **j)** $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0\ [\pi]$ **k)** $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0\ [2\pi]$

**Exercice 10 :**

Soit $ABCD$ un carré direct, et $E\ et\ F$ les points tels que $ABE$ et $BCF$ soit équilatéraux et directs.
("Direct " signifie qu'on respect l'ordre des point dans le sens direct)
Le but de cet exercice va être de montrer que D, E et F sont alignés.

1) **a)** Déterminer la nature du triangle $DEA$ puis une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DE})$
   **b)** En déduire une mesure de l'angle$(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC})$
2) **Déterminer la nature du triangle CDF puis une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DC})$**
3) Montrer que $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) = 0[\pi]$. Conclure.

**Exercice 11:**

Soit $A, B, C, D\ et\ E$ les points tels que $AB = AC = 1$ ; $AD = 2\ et\ AE = 3$ ; et les angles vérifiant

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{25\pi}{12}[2\pi]$ ; $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\frac{119\pi}{4}[2\pi]$ $et$ $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)=-\frac{25\pi}{6}[2\pi]$ .

Démontrer que les points $A$, $D$ et $E$ sont alignés ; calculer $DE$.

1) $a, b\ et\ c$ sont trois nombres réels et ; $A, B, C, D\ et\ E$ des points tels que $AB=AC=1$ $AD=2\ \ et\ \ AE=3$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=a[2\pi]$ ; $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=b[2\pi]$ $et$ $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)=c[2\pi]$ .
Déterminer une relation entre $a, b\ et\ c$ pour que les points $A, D\ et\ E$ soient alignés. Calculer $DE$. (On distinguera deux cas).

**Exercice 12 :**

Dans un plan orienté, on considère le cercle $(C)$ de centre $O$ et deux points $A\ et\ B$ de $(C)$ tels que : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit M un point de $(C)$ distinct de $A\ et\ B$

1) a) Comparer $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}\right)\ et\ \left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}\right)$ puis $\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}\right)\ et\ \left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BO}\right)$
   b) Montrer que : $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$
   c) en déduire que : $2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$
2) Soit $C$ le point du cercle $(C)$ tel que le triangle $ABC$ soit isocèle en $C$ et direct
   a) Déterminer la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$
   b) Calculer alors $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}\right)$
3) Soit $B'$ le point diamétralement opposé à $B$ sur le cercle $(C)\ et\ D$ le point de $(C)$ tel que : $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)=-\frac{\pi}{12}[2\pi]$
   a) Prouver que les vecteurs $\overrightarrow{OC}\ et\ \overrightarrow{AB'}$ sont colinéaires.
   b) En déduire que les droites $(AB')\ et\ (BD)$ sont parallèles et donner la nature du quadrilatère $ABDB'$.

**Exercice 13 :**

Soit $A, B, C, D\ et\ E$ quatre points du plan tels que $A\in[BD]$, $AD=AC, AB>AD, BE=BC$,

$\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BD}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\alpha[2\pi]$.

1) Exprimer $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}\right)$ en fonction de $\alpha$.
2) Démontrer que $C$ est sur le segment $[DE]$.

**Exercice 14 :**

1) Sur le cercle trigonométrique, On considère les points $I(0)$, $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $B\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, et $M(\alpha)$.
   a) Déterminer le mesure principale de l'arc orienté $\widehat{IM}$.
   b) Quels sont les points M pour les quels, $mes\ \widehat{AM}=mes\ \widehat{MB}\ [2\pi]$ ?
2) Citer cinq valeurs distinctes de l'entier naturel *n* de façon que $\frac{n\pi}{8}=\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

**Exercice15 : Cocyclicité**

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe de diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupant en $I$ .Soit $P$ , $Q$ , $R\ et\ S$ les projetés orthogonaux respectifs de $I$ sur $(AB)$ , $(BC)$ , $(CD)\ et\ (DA)$ .

1-) Construire la configuration précédente.

2-) Montrer que les points $A, P, I\ et\ S$ sont cocycliques. Citer trois autres cocyclicités similaires.

3-)a-) Montrer que : $\left(\overrightarrow{PS},\overrightarrow{PQ}\right)=\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}\right)[\pi]$ .

b-) Montrer que : $\left(\overrightarrow{RQ},\overrightarrow{RS}\right)=\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}\right)[\pi]$ .

4-) En déduire que : $\left(\overrightarrow{PS},\overrightarrow{PQ}\right)+\left(\overrightarrow{RQ},\overrightarrow{RS}\right)=2\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{CA}\right)[\pi]$ .

5-) Montrer que les points $P, Q$ , $R\ et\ S$ sont cocycliques si et seulement si les diagonales $[AC]\ et\ [BD]$ sont perpendiculaires .Illustrer cette situation sur une figure.

**Exercice 16 : Triangle orthique**

Soit $ABC$ un triangle non rectangle, $O$ est le centre de son cercle circonscrit $(C)$ et $H$ son orthocentre. Les droites $(AH) et\ (BC)$ se coupent en $Q$, les droites $(BH) et\ (AC)$ se coupent en $R$, les droites $(CH)$ et $(AB)$se coupent en $P$.

1. a. Montrer que les points $A, B, Q$ $et$ $R$ sont cocycliques. En déduire que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \equiv (\overrightarrow{RA}, \overrightarrow{RQ})[\pi]$.
   b. Soit $T$ un point quelconque de la droite tangente en $C$ au cercle $(C)$. Montrer que $(\overrightarrow{RA}, \overrightarrow{RQ}) \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CT})[\pi]$. En déduire que les droites $(RQ) et$ $(CT)$ sont parallèles.

   c. Montrer que les droites $(RQ) et$ $(OC)$ sont perpendiculaires.

2.a. En utilisant la cocyclicités des points $A, C, P$ $et$ $Q$ d'une part et $Q, C, R$ $et$ $H$ d'autre part, montrer que : $(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QA}) \equiv (\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QR})[\pi]$.

b. En déduire que $(AH)$ est une bissectrice du triangle $QRP$. Dit **Triangle Orthique**

**<u>Exercice 17 :</u> Symétriques de l'orthocentre**

Soit $H$ l'orthocentre d'un triangle $ABC$ non aplati et non rectangle.

1. Montrer que $H$ est différent de $A, B$ $et$ $C$.
2. Calculer $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB})$ en fonction de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.
3. Soit $K_c$ l'image de $H$ par la réflexion de l'axe $(AB)$. Montrer que les points $A, B, C$ $et$ $K_c$ sont cocycliques.

**« Je n'ai jamais rencontré d'homme si ignorant qu'il n'eut quelque chose à m'apprendre. »**
**Galilée (1564-1642)**