Axlou Toth pour l'Innovation

NIVEAU : SECONDE S

TRANSFORMATIONS PLANES

Exercice 1 :

Soit $ADCB$ un parallélogramme. On considère l'application f du plan P dans P qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

1) Déterminer l'image du point B par f.

2) Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.

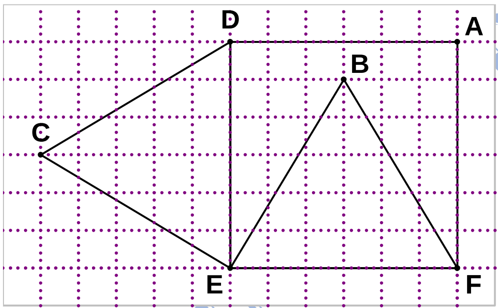
Exercice 2 :

On considère un carré direct $ADEF$ et les triangles équilatéraux BEF et CED;

1) Construire le point M tel que AEM soit un triangle équilatéral direct ;

2) Montrer que M, F et D sont alignés.

3) En utilisant la rotation de centre E et d'angle $\frac{\pi}{3}$, montrer que A, B et C sont alignés.



Exercice 3 :

1) Déterminer une équation du cercle (C) de centre $A(1; 2)$ et de rayon 3.

2) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2.

Donner une équation du cercle (C') image du cercle (C) par h.

3) Ecrire une équation de la droite (D) tangente au cercle (C) au point $C(4; 2)$.

4) Déterminer une équation de la droite (D') image de (D) par h.

La droite (D') est-elle tangente au cercle (C') ? Si oui, en quel point ?

Exercice 4 :

Soit ABC un triangle.

1) On note I le milieu de $[BC]$.

Préciser la nature du triangle ABC, sachant qu'il existe une rotation de centre I transformant B en C.

2) Si ABC est équilatéral de sens direct, J le milieu de $[AC]$, montrer qu'il existe une rotation de centre J, transformant A en I et déterminer son angle.

Exercice 5 :

On considère la transformation f qui à tout point $M(x; y)$ du plan associe le point $M'(x'; y')$ tel que : $\begin{cases} x' = -3x + 4 \\ y' = -3y + 2 \end{cases}$.

1) Démontrer que f admet un point invariant I dont on précisera les coordonnées.

2) Démontrer qu'il existe un nombre réel k tel que : $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

4) Soit (D) la droite d'équation : $3x - y = 5$.

Déterminer une équation de la droite (D') image de (D) par f.

5) Déterminer une équation de la droite (Δ) dont (D) est l'image par f.

Exercice 6 :

Soit A et B deux points du plan, (C) un cercle de rayon r ne coupant pas (AB), M un point de (C) non situé sur la droite (AB). Soit G le centre de gravité du triangle ABM. I milieu de $[AB]$; N le symétrique de M par rapport à G.

1) Faire une figure.

2) Exprimer $\overrightarrow{IN}$ en fonction de $\overrightarrow{IM}$.

3) Préciser la nature de la transformation qui transforme M en N.

4) Déterminer le lieu géométrique de N lorsque M décrit (C).

Exercice 7 :

On considère une homothétie h de centre Ω et de rapport k $(k \neq 1)$.

Pour tout point M, on note $M' = h(M)$.

1) Exprimer $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de $\overrightarrow{\Omega M}$.

2) Déterminer l'ensemble des points M tels que MM' a une longueur donnée.

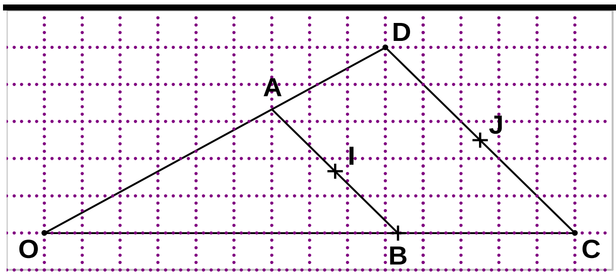
3) Soit A et B deux points distincts.

Construire M tel que $ABMM'$ est un parallélogramme lorsque $k = 2$.

Exercice 8 :

Soit $ABCD$ un trapèze dont les bases $[AB]$ et $[CD]$ ont pour milieux respectifs I, J.

On note O le point d'intersection des droites (AD) et (BC).



On veut montrer que O, I et J sont alignés.

On appelle h l'homothétie de centre O qui transforme A en D.

1) Déterminer $h(B)$.

2) En déduire $h(I)$.

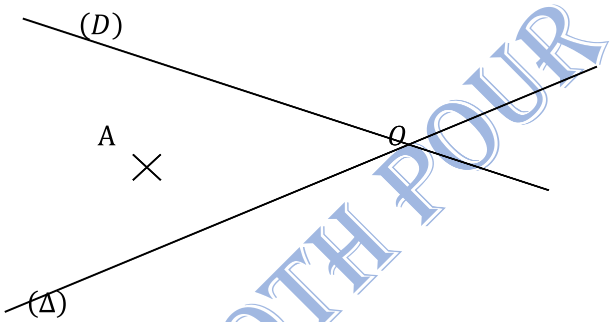
3) Justifier l'alignement des points O, I et J.

Exercice 9 :

Sur la figure ci-dessous (D) et (Δ) sont deux droites sécantes en O ;

A un point fixe n'appartenant à aucune de ces deux droites.

Construire un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que B soit sur (D) et C sur (Δ).



Exercice 10 :

On donne un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) On donne les points $(2;-1)$, $B(1;3)$ et $C(-1;-2)$.

Déterminer l'expression analytique de chacune des transformations suivantes :

a) f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b) f est la symétrie orthogonale d'axe (BC).

c) f est l'homothétie de centre A et de rapport -2.

d) f est la symétrie centrale de centre C.

2) Déterminer la nature et les éléments géométriques caractéristiques de l'application f du plan dans lui-même définie analytiquement par :

a) $f : \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + \sqrt{3} \end{cases}$; b) $f : \begin{cases} x' = -2x + 2 \\ y' = -2y \end{cases}$; **c)** $f : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$;

d) $f : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$; **e)** $f : \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$; **f)** $f : \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$.

3) Pour chacune des applications de la question 2), déterminer les images des points A, B et C.

Exercice 11 :

Soit $ABCD$ un carré tel que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

On note E, F, G et H les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1) Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme A en D et B en A.

Déterminer son centre et son angle.

2) Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme B en D et A en A.

Déterminer son centre et son angle.

3) Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme A en D et G en F.

Déterminer son centre et son angle.

4) a) Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme A en D et G en E. Déterminer son centre.

b) Soit α une mesure principale de son angle. Démontrer que $\tan\left(\frac{-\alpha}{2}\right) = 2$.

En déduire, à l'aide d'une calculatrice, une valeur approchée de α.

Exercice 12 :

1) Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul. Montrer qu'une droite (D) est globalement invariante par t (c'est-à-dire $t(D) = (D)$) si, et seulement si, $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D).

2) Soit h une homothétie de centre O distincte de l'application identique.

Montrer qu'une droite (D) est globalement invariante par h si, et seulement si, O appartient à (D).

Exercice 13 :

Dans le plan orienté, ABC est un triangle équilatéral, tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

O est son centre de gravité. S_1 est la réflexion d'axe (OA) et S_2 est la réflexion d'axe (OB). Déterminer $S_2 \circ S_1$.

Exercice 14 :

On considère deux segments $[AB]$ et $[CD]$ à supports parallèles et distincts.

1) Justifier l'existence d'un réel k tel que : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

2) Quelle configuration obtient-on si : $k = 1$ ou $k = -1$?

Pour la suite, on suppose $k \neq 1$ et $k \neq -1$.

3) A l'aide du théorème de Thalès, montrer que (AC) et (BD) d'une part, et (AD) et (BC) d'autre part sont sécantes.

On note I le point d'intersection de (AC) et (BD) et J celui de (AD) et (BC).

4) Montrer que l'homothétie de centre I et de rapport k transforme $[CD]$ en $[AB]$ et qu'il en est de même de l'homothétie de centre J et de rapport $-k$.

5) Existent-ils d'autres homothéties qui transforment le segment $[CD]$ en le segment $[AB]$.

Exercice 15 :

Soit (C) le cercle de centre O et de rayon R et (C') le cercle de centre O' et de rayon R'.

(On suppose que (C) et (C') sont non concentriques et donc $R' \neq R$.)

1) Montrer qu'il existe deux homothéties et deux seulement transformant (C) en (C'), l'une de rapport $\frac{R'}{R}$, l'autre de rapport $-\frac{R'}{R}$.

Exprimer les centres de ces homothéties comme barycentre de O et de O'.

2) Soit $[AB]$ un diamètre de (C) et $[A'B']$ un diamètre de (C') tels que (AB) et $(A'B')$ sont parallèles et distinctes. Montrer que :

- (AA') et (BB') sont sécantes en un point noté I.
- (AB') et $(A'B)$ sont sécantes en un point noté J.
- I et J appartiennent à (OO') et sont les centres des homothéties transformant (C) en (C').

3) Montrer que si les deux cercles (C) et (C') sont tangents en I, alors I est le centre d'une homothétie transformant (C) en (C').

4) Etablir que, si les deux cercles admettent une tangente commune, cette tangente passe par l'un des centres d'homothétie transformant (C) en (C').

Indication : Montrer qu'elle rencontre (OO') en un point et considérer l'homothétie centrée en ce point qui transforme O en O'.