# Axlou Toth pour l'Innovation

| | | |
|---|---|---|
| **Année Scolaire** : 2019-2020<br>**Lycée :** Cours d'encadrement Scientifique de Axlou Toth | **SÉRIE D'EXERCICES N°2**<br>**Polynômes : Approfondissement et Synthèse** | **Niveau** : 1S1/C<br>**Professeur** : M. Diallo |



## Exercice 1 : Calcul Algébrique

A) Exprimer à l'aide du symbole Σ les expressions suivantes :

1) $S_1 = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^{12}$
2) $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{10}{1024}$
3) $S_3 = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \cdots + \frac{a^n}{n}$
4) $S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$

B) Soient $a_1, a_2, a_3, a_4$ quatre variables. Ecrire à l'aide des symboles $\Sigma$ $et$ $\Pi$ les quantités suivantes.

1) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.
2) $a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + a_1a_2a_3a_4$
3) $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4$.
4) $a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4$.
5) $a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_3a_4$.
6) $a_1(a_1 + a_2)(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$.

C) Démontrer les inégalités suivantes

1) $\sum_{k=0}^{n}(n-k) = \frac{n(n+1)}{2}$
2) $\sum_{k=0}^{n}(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
3) $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$

D) Démontrer les inégalités suivantes.

1) $\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n n!$.
2) $\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$
3) $\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k-1} = 2n+1$.
4) $\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2-1}{k} = \frac{(n+1)!}{2n}$.

## Exercice 2 : Principe Récurrence

**Démontrer par récurrence les résultats suivants :**

1) $\forall n \geq 1, 1+3+5+\ldots..+(2n-1) = n^2$

2) $\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$

3) $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ........ + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4) Montrer par récurrence que : $v_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + .... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

5) Montrer de même que, pour tout $n \geq 1$ :

$$1 - 3 + \cdots + (2n-1)(-1)^{n-1} = n(-1)^{n-1}.$$

6) $\forall n \in IN,\ 2^n \geq n+1$

7) Soit $x$ un réel positif, $n$ un entier naturel. Montrer que : $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Montrer par récurrence que

$a)$ $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7

$b)$ $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11.

8) $\forall n \geq 1, \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$
9) $2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}$
10) $\forall\ n \geq 4, 2^n \leq n!$
11) $\forall\ n \geq 1, \sum_{k=1}^{n} k \times k! = (n+1)! - 1$

**<u>Exercice 3 :</u> Suite bornée**

A) Soit la suite $(U_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = 3 - \frac{2}{U_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Montrer que $(U_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est bien définie (i.e $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n$ existe) et vérifier que $1 \leq U_n \leq 2$ , $\forall n \in \mathbb{N}$.

B) Soit $(U_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Montrer que pour tout $n$ entier naturel, $0 \leq u_n \leq 4$ .

**<u>Exercice 4 :</u> Monotonie**

1) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $u_n = \frac{-1}{n+1}$. Calculer les cinq premiers termes de $(u_n)$ puis montrer qu'elle croissante.
2) Etudier le sens de variation des suites suivantes définies par :

a) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - n \end{cases}$  b) $v_n = 4n^2 + 3n + 5$  c) $w_n = \frac{n}{3^n}$  d) $t_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

**<u>Exercice 5 :</u> Périodicité**

A) Vérifier que chacun des cas suivants que la suite $(U_n)$ est périodique et préciser sa période :

1) $U_n = \cos\frac{2n\pi}{5} + \ sin\,\frac{2n\pi}{5}$  2) $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = -U_n^2 + 2U_n + 1, \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

3) $\begin{cases} U_0 = 2 \quad , \quad U_1 = 25 \\ U_{n+2} = U_{n+1} - U_n \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

4) $U_n = n - 7E\left(\frac{n}{7}\right)$ , $\forall$ n$\in \mathbb{N}$, $E$ est la fonction partie entière.

5) $U_n = (-1)^n$

B) Soit $(u_n)$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{3u_n + 1}$.

1) Calculer les 4 premiers termes de $(u_n)$.
2) Représenter graphiquement $(u_n)$.
3) Montrer que $(u_n)$ est périodique de période 3.

**Exercice 6 : Suite arithmétique**

Soit la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} \end{cases}$ et on pose $v_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n - 1}$.

1) Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$; en déduire que $(u_n)$ n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Montrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique et préciser la raison et le premier terme.

3) Exprimer $(v_n)$ puis $(u_n)$ en fonction de

4) Exprimer en fonction de $n$ :

$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

**Exercice 7 : Suite géométrique**

Soit la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n \end{cases}$.

1° Calculer les termes $u_2$, $u_3$ et $u_4$.

2° Pour $n \geq 1$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.

Montrer que la suite $(v_n)$ est géométrique et préciser sa raison.

En déduire $u_n$ en fonction de n.

3° Donner le sens de variation de la suite $(v_n)$

4° Montrer qu'à partir d'un certain rang la suite $(u_n)$ est monotone.

**Exercice 8 : Conjecture**

Soit la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\begin{cases} V_1 = a + b \ avec \ |a| \neq |b| \\ V_{n+1} = a + b - \frac{ab}{V_n}, \forall \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

1) Calculer $V_1, V_2 \ et \ V_3$, en utilisant uniquement les nombres $a - b,\ a^2 - b^2,\ a^3 - b^3 \ et \ a^4 - b^4$.

2) Conjecturer sur le terme général $V_n$ puis prouver cette conjecture.

**Exercice 9 : Formule explicite d'une suite**

Soit la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{16}\left(1 + 4U_n + \sqrt{1 + 24U_n}\right), \forall\, n \geq 1 \end{cases}$

On définit la suite $(V_n)_{n\geq 2}$ par $V_{n+1} = \sqrt{1 + 24U_n}$ , $\forall\, n \geq 1$

Montrer que $V_{n+1} = \frac{1}{2}(V_n + 3)$ , $\forall\, n \geq 2$

Donner une formule explicite de suite $(V_n)_{n\geq 2}$

En déduire que $U_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3\times 2^{2n-1}}$ , $\forall\, n \geq 1$

**Exercice 10 : Suite géométrique**

$u$ est une suite arithmétique croissante telle que : $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases}$

1) Calculer le premier terme $u_0$ et la raison $r$ de cette suite, puis exprimer le terme général $u_n$ en fonction de $n$.

2) $v$ est la suite définie par : $v_n = 2^{u_n}$.

a) Montrer que $v$ est une suite géométrique.

b) Calculer $P_n = v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n$.

**Exercice 11 : Suite arithmético-géométrique**

Soit la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+2} = au_n + b \end{cases}$, avec $a$ *et* $b$ réels et $a \neq 0$.

1) Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ et l'expression de $u_n$ et l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.
   a) Lorsque $b = 0$ ? b) lorsque $a = 1$ ?
2) On suppose maintenant que $a \neq 1$.
   a) Calculer, en fonction de $a$ *et* $b$, l'abscisse $\alpha$ du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = ax + b$.
   b) Montrer que la suite de terme général général $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique.
   c) Exprimer $v_n$, puis $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 12 : Suite de Fibonacci**

**On cherche le terme général de la suite définie par :** $\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = 6 \;\; et \;\; u_1 = 2} \\ \boldsymbol{u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n} \end{cases}$

On note $r_1$ la racine négative et $r_2$ la racine positive de l'équation : $x^2 + x - 6 = 0$.

Soient $(v_n)$ et $(w_n)$ les suites définies par :

Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - r_1 u_n \quad et \quad w_n = u_{n+1} - r_2 u_n$

a) Montrer que $(v_n)$ et $(w_n)$ sont des suites géométriques dont on déterminera les raisons et les premiers termes $v_0$ *et* $w_0$ .

b) Calculer $v_n$ $et$ $w_n$ en fonction de n.

c) En déduire $u_n$ en fonction de n.

2) On suppose que a, b, α et β sont des réels donnés et que l'équation :

$x^2 - ax - b = 0$ admet deux solutions distinctes notées $r_1$ $et$ $r_2$ .

**On cherche le terme général de la suite définie par ;** $\begin{cases} \boldsymbol{t_0 = \alpha \ et \ t_1 = \beta} \\ \boldsymbol{t_{n+2} = at_{n+1} + bt_n} \end{cases}$

Soient les suites $(x_n)$ et $(y_n)$ définies par :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = t_{n+1} - r_1 t_n$ $et$ $y_n = t_{n+1} - r_2 t_n$

a) Montrer que $(x_n)$ et $(y_n)$ sont géométriques de raisons respectives a$-r_1$ et a$-r_2$ .
**b)** Exprimer $\boldsymbol{x_n \ et \ y_n}$ en fonction de a, b, α, β, $r_1$, $r_2$ et n.
**c)** Montrer que $t_n = \frac{1}{r_2 - r_1}[(\beta - r_1\alpha)(a - r_1)^n - (\beta - r_2\alpha)(a - r_2)^n]$
**d)** On pose α = 0, β = 1, a = 1, b = 1.

Calculer $r_1$ et $r_2$ ($r_1$ étant la solution négative et $r_2$ celle positive) ; puis exprimer $\boldsymbol{t_n}$ en fonction de n en utilisant la relation de la question précédente. **( on obtient ainsi l'expression de la suite dite de FIBONACCI).**



**Récréation mathématique**

Au moyen Âge, en 1202, **Fibonacci** pose le problème suivant dans le **« Liber Abacci** »

« Un homme place un denier à intérêts composés à taux tel qu'il possède 2 deniers en 5 $ans$, et que tous les 5 $ans$ son a avoir double.

Je demande combien il aura gagné de deniers à partir d'un seul en 100 $ans$ ? »