# Axlou Toth pour l'Innovation

| | | |
|---|---|---|
| **Année Scolaire** : 2019-2020<br>**Lycée :** Cours d'encadrement Scientifique de Axlou Toth | **Série d'Exercices**<br>**Suites Convergentes** | **Niveau** : 1S1/C<br>**Professeur** : M. Diallo |

**Exercice 1 : Raisonnement par récurrence**

**On rappelle que** $1\times2\times3\times...\times n = n!$ **et on lit factorielle** $n$ **.**

**Par convention** $0! = 1$ **et** $n! = n(n-1)!$

1. Démontrer par récurrence les résultats suivants :

a- $\forall\, n\, \mathbb{N}$ on a : $2^n \;\geq\; n+1$

b- $2^n \geq n^{2.}$ $\forall\, n\, \mathbb{N}$

c- $3^n > n^3 \forall\, n\, \mathbb{N}$

d- $\forall\; n\; \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

e- $\forall\, n\; \in\; \mathbb{N}^*$, on a : $\prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$

f- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, (a-b)\left(\sum_{k=1}^{n} a^{k-1} b^{n-k}\right) = a^n - b^n$

g- $\forall\, n\; \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k! \;\leq (n\; + 1)!$

h- $\forall n \in IN^*,\ \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2k}\right) \leq 1-\frac{1}{2^n n!}$

2. Soit n un entier naturel non nul.

a- Démontrer que : $cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n\ fois\ \sqrt{\ }}$ et $sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n\ fois\ \sqrt{\ }}$

b- En déduire que : $\pi = \lim_{n\to+\infty}\left(2^n \times \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n\ fois\ \sqrt{\ }}\right)$

**Exercice 2 : Recherche d'une forme explicite**

Pour tout entier naturel n non nul , on pose $U_n = \overbrace{111.....111}^{n\ chiffres}$ ( Exemple $U_3 = 111$ = cent onze )

;d'autre part si a est un chiffre autre que zéro , on pose $Sn(a) = a + aa + aaa + .........+ \overbrace{aaa.....aaa}^{n\ chiffres}$

( Exemple $S_3(9) = 9 + 99 + 999 = 1107$ ) .

1-) Calculer $U_n$ en fonction de n .

2-) En déduire une expression de $S_n(1) = U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n$ en fonction de n , puis une expression de $S_n(a)$ en fonction de n et a .

3-) Calculer $S_n(1) + S_n(2) + \ldots\ldots\ldots + S_n(9)$ en fonction de $S_n(1)$ , puis en fonction de n

**Exercice 3 : Raisonnement par Analyse-Synthèse**

**Le but de cet exercice est d'expliciter la fonction $f$ vérifiant :**

$\boldsymbol{f}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Injective telle que $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{f(n)} \leq \boldsymbol{n}$.

1) Calculer $\boldsymbol{f(0), f(1)}$ ***et*** $\boldsymbol{f(2)}$ .
2) Emettre une conjecture sur la valeur de $\boldsymbol{f}(*)$
3) Montrer que $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{f(n)} \leq \boldsymbol{f(n+1)}$.
   En déduire par l'injectivité de $f$ que l'inégalité est stricte.
4) Montrer alors, par récurrence, la conjecture $(*)$ faite en 2)

**<u>Exercice 4</u> : Etude de convergence**

1) A l'aide des opérations sur les limites, déterminer, la limite de chacune des suites $(u_n)$ puis conclure sur la convergence
   a) $u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}$ ; b) $u_n = n^2 + 3n$ ; c) $u_n = \frac{1}{n} - n^2$ ; d) $u_n = 3 - \frac{2}{n}$ ; e) $u_n = \left(2 - \frac{3}{n}\right)^2$ ;
   f) $u_n = \sqrt{4 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}}$ ;
2) A l'aide des opérations sur les limites, déterminer, la limite de chacune des suites $(u_n)$ puis conclure sur la convergence
   a) $u_n = 2^n - \frac{3}{n}$ ; b) $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{n^2}$ ; c) $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n$ ; d) $u_n = \frac{1}{2^{2n+4}}$ ; e) $u_n = n^2 + 3^n$

   f) $u_n = 3^{2n} \times 2^{-3n}$
3) Déterminer la limite de chacune de suites suivantes $(u_n)$ suivantes définies par :
   a) $u_n = \frac{3^n - 1}{3^n - 2}$ ; b) $u_n = \frac{2^n - 1}{3^n}$ ; c) $u_n = \frac{1 - 5^n}{3 + 4^n}$ d) $u_n = \frac{5 - 2^n}{3 + 4^n}$ e) $u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$ f) $u_n = \frac{1 + 4^n}{2^n + 5 \times 3^n}$.

**<u>Exercice 4</u> ☹<u>bis</u> Etude de convergence**

Calculer les limites des suites définies par leur terme général dans chacun des cas suivants puis puis conclure sur la convergence

a) $u_n = \sin\left(\frac{n\pi + 1}{n}\right)$ b) $u_n = \frac{n^2 + 5}{n\sqrt{n}}$ c) $u_n = \frac{n!}{n! - n + 2} . \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ d) $u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}$

e) $u_n = \frac{n!}{n! - \cos n} . \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ f) $u_n = \frac{\sqrt{n^2 + 3} - n}{\sqrt{n^2 + 1} + 1}$ ; e) $u_n = \frac{n!}{n^n}$ ; g) $u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$

**<u>Exercice 5 :</u> Théorème de Comparaison acte 1**

1) A l'aide des théorèmes de comparaison, déterminer la limite de chacune des suites $(u_n)$ suivantes définies par :
   a) $u_n = \frac{\cos n}{n}$ ; b) $u_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ ; c) $u_n = (-1)^n n + n^2$ ; d) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ ; e) $u_n = \frac{n + \sin n}{n}$
   f) $u_n = \frac{n^2}{2 + (-1)^n}$ ; g) $u_n = \frac{3n + (-1)^n}{2n + 1}$ ; h) $u_n = \frac{\sin n}{2n + 1}$ i) $u_n = \frac{n + \sin n}{2n + 1}$.

**<u>Exercice 6 :</u> Théorème de Comparaison acte 2**

1) Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \frac{\sqrt{n} + \cos\frac{n\pi}{4}}{\sqrt{n} + 1}$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \neq 0$, $|u_n - 1| \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$.
   b) En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

2) Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \frac{\sin n - 3n^2}{n^2+1}$
   a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \neq 0$: $|u_n + 3| \leq \frac{4}{n^2}$.
   b) En déduire la limite de la suite $(u_n)$.
3) Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \frac{3n+\cos n}{2n+1}$.
   a) Montrer que , pour tout entier naturel $n \neq 0$: $\left|u_n - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{5}{4n}$.
   b) En déduire la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 8 : Avec de bons gendarmes**

1) Soit $(U_n)$ la suite définie par : $U_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots\dots\dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, pour tout
   a) Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$ et en déduire que pour tout $n \succ 1$
   $U_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$
   b) Montrer que la suite $(U_n)$ est divergente.
2) Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots\dots\dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.
   a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.
   b) En déduire la suite $(U_n)$ est convergente et déterminer sa limite.
3) Soit $(w_n)$ la suite définie dans $\mathbb{N}^*$ par : pour tout entier naturel non nul n,
$$w_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + \cdots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \frac{1}{n+\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}$$
   a) Prouver que : pour tout entier naturel non nul n, $\frac{n}{n+\sqrt{n}} \leq w_n \leq \frac{n}{n+1}$
   b) Montrer que $(w_n)$ est borné.
   c) Montrer que $(w_n)$ est convergente et déterminer sa limite.
4) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{n + u_n}{n^2} \end{cases}$
   a) Montrer que $(\forall\ n \geq 1)$, $u_n \leq 2$
   b) En déduire que $(u_n)$ est convergente et calculer sa limite.
   c) Montrer que $\forall\, n \geq 1, \frac{1}{n-1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{(n-1)^2}$. En déduire la limite de $nu_n$
   d) On veut étudier la monotonie de la suite $(u_n)$
      i) Montrer que la suite $v_n = \frac{n}{n^2-1}$ est décroissante.
      ii) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $u_n \geq v_n$
      iii) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.
5) On définit la suite $(V_n)$ par $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$: $V_n = \frac{1}{U_n - n} - 1$
   a) Calculer $V_1$ et montrer que $V_{n+1} = \frac{1}{V_n + \frac{1}{n}}$
   b) Montrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{1}{n} \leq V_n \leq 1$
   c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n - n)$

6) On considère la suite $(U_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2 + \frac{n^2}{U_n} \quad \forall\, n \geq 1 \end{cases}$

a- Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a $n < U_n < n+1$

b- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

c- Montrer que $(U_n)$ est croissante

**Exercice 9 : Sommes et Produits de termes**

A) On considère la suite $(U_n)$ définie par : $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $U_o = \frac{2}{3\sqrt{2}}$ .

1-)Calculer $U_1$ , $U_2$ $et$ $U_3$ .

2-)a-)On pose pour tout $n \in IN$ , $V_n = \sqrt{2}U_n - n$ .Montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique .Préciser la raison et le premier terme .

b-)En déduire l'expression de $U_n$ en fonction de $n$ .

3-)Calculer $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ en fonction de n .

4-)Déterminer les limites de $S_n$ et $U_n$ en $+\infty$ .

B) On considère la suite $(U_n)$ définie par : $U_0 = 2$ , $U_1 = 3$ et $\forall n \in IN^* \setminus \{1\}$ ,

$$U_n = \frac{4U_{n-1} - U_{n-2}}{3}$$

1-)Calculer $U_2$ , $U_3$ et $U_4$ .

2-) Soit $(V_n)$ la suite définie sur $IN^*$ par : $V_n = U_n - U_{n-1}$ .

a-)Montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b-) Exprimer $V_n$ en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ .

c-) On pose $P_n = V_1 \times V_2 \times \ldots\ldots\ldots \times V_n = \prod\limits_{k=1}^{n} V_k$ .Exprimer $P_n$ en fonction de n.

d-) Calculer $S_n = V_1 + V_2 + \ldots\ldots\ldots + V_n$ en fonction de n puis $S'_n = U_0 + U_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + U_n$ en fonction de n .Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n$ .

**Exercice 10 : Récurrence homographique**

On définit la suite $(u_n)$ sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{2u_n + 1}$ .

1. Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$ .
2. Soit la fonction h définie sur $\left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[$ par $h(x) = \frac{x+8}{2x+1}$ et (H) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).
   a. Construire (H) et la droite $(\Delta)$ d'équation $y = x$ .
   b. En utilisant (H) et $(\Delta)$, représenter $u_0$, $u_1$ ,$u_2$ et $u_3$ .
   c. Que peut-on conjecturer quant à la convergence de la suite $(u_n)$ ?
3. $(v_n)$ est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$ .

a. Calculer $v_0$ , $v_1$ et $v_2$.

b. Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c. Exprimer $v_n$ en fonction de n et déterminer la limite de la suite $(v_n)$.

d. Exprimer $u_n$ en fonction de n et déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 11 : Tout dépend du paramètre a**

I) On considère la suite $(U_n)$ par : $U_0 = 0$ , $U_1 = 1$ et $U_{n+1} = aU_n + (1-a)U_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ et $a \in IR$ .

On pose pour tout $n \in IN$ : $V_n = U_{n+1} - U_n$ .

1-) Montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme
2-) Exprimer $V_n$ en fonction de $n$ $et$ $a$ puis $U_n$ en fonction de $n$ $et$ $a$ .
3-) Comment choisir a pour que la suite $(U_n)$ soit convergente ? Quelle est sa limite ?

II) Soit $a$ un nombre réel positif différent de 1.

1-) On considère la suite $(U_n)$définie par :$U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{1+aU_n}{a+U_n}$

a-)Calculer les deux premiers termes de la suite $(U_n)$.
b-)Montrer par récurrence que la suite $(U_n)$ est définie c'est-à-dire $U_n \neq -a$ pour tout $n \in IN$

2-)On pose $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+1}$

a-)Montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique .Préciser sa raison et le premier terme .
b-)Exprimer $V_n$ puis $U_n$ en fonction de n
c-)Etudier la convergence de la $(U_n)$

**<u>Exercice 12 :</u> Raisonnement par Absurde et convergence**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par son premier terme $u_0$ et par la condition : $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
2) Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3) Démontrer que si $u_0 + u_0^2 < 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
4) Démontrer que si $u_0 + u_0^2 < 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $-1 < u_n < 0$.
   Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**<u>Exercice 13 :</u> Sommes télescopiques**

**A)** Soit $(u_n)$ la suite définie par $n \geq 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

1) Déterminer les réels $a$ $et$ $b$ tels que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$
2) En déduire la limite de $(u_n)$.
3) Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

**B)** Déterminer les limites des suites suivantes :

a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$, (indication, $0 \leq S_n \leq \frac{n}{n^2+1}$)
b) $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$, (indication $0 \leq S_n \leq \frac{n}{(n+1)^2}$)
c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ (indication, $\frac{n}{n+1} \leq S_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$)
d) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ (Indication, $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq S_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$)

**C)** $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k!$ (Indication, $S_{2n} \geq (2n)! - (2n-1)!$ Et Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kU_k$

a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, S_n - \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k(U_k - 1)$
b) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\left|S_n - \frac{n+1}{2n}\right| \leq \frac{1}{n}$
c) Montrer que la suite $(S_n)$ converge vers $\frac{1}{2}$

**D)** On considère la suite $(S_n)_{n\geq1}$ définie par : $S_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{7}{5^3} + \ldots + \frac{3n-2}{5^n} = \sum_{p=1}^{n} \frac{3p-2}{5^p}$

1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^\star, on\ a$: $S_{k+1} - S_k = \frac{3k-2}{5^k} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{5^{k+1}}$
2) En déduire :
   a) Le sens de variation de la suite $(S_n)_{n\geq1}$

b) La relation : $S_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}S_n + \frac{3}{20}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$ , $\forall n \in \mathbb{N}^\star$

3) Déduire des résultats du 2) que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée.

4) Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge et calculer sa limite.

**Exercice 14 : Suites de polynômes**

On considère la suite des polynômes définies ainsi : $f_0(x) = 1; f_1(x) = x$ ;

Pour tout $n \in \mathbb{N}, f_{n+2}(x) = 2xf_{n+2}(x) - f_n(x)$

1) Calculez $f\_i(x)$ pour $i \in \{2,3,4,5\}$
2) a) Démontrez que si, pour $p \geq 0$, les monômes de $f_{2p}(x)$ sont tous de degré pair, et les monômes $f_{2p+1}(x)$ sont tous de degré impair, alors tous les monômes de $f_{2p+2}(x)$ sont de degré pair
   b) Démontrez que si, pour $p \geq 0$, les monômes de $f_{2p+1}(x)$ sont tous de degré impair, et les monômes de $f_{2p+2}(x)$ sont tous de degré pair, alors tous les monômes de $f_{2p+3}(x)$ sont de degré impair
   c) Déduisez de ce qui précède que le polynôme $f_n(x)$ a tous ces monômes de degré pair lorsque $n$ est pair et tous ses monômes de degré impair lorsque $n$ est impair (pour tout $n \in \mathbb{N}$).
3) On pose : $f_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n+2} + \cdots$, pour tout $n \geq 2$.
   a) Démontrez que $(a_n)$ est une suite géométrique. Calculez $a_n$ en fonction de $n$
   b) Démontrez que $b_{n+2} = 2b_{n+1} - a_n$. Déduisez-en que $b_n = -n.2^{n-3}$.
4) a) Démontrez par récurrence que $f_n(1) = 1$
   b) Démontrez par récurrence que : $f_n(-1) = 1$ quand $n$ est pair ; $f_n(-1) = -1$ quand $n$ est impair.

**Exercice 15 : Suites récurrentes**

A) Soit $(w_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = \frac{(n+2)w_n + 2(n^2 + n - 1)}{(n+1)^2} \end{cases}$

1. Montrer que la suite $(w_n)$ est décroissante.
2. Montrer que la suite $(w_n)$ est convergente et calculer sa limite l.
3. Calculer $w_{n+1} - l$ en fonction de $w_n - l$
4. En déduire $w_n$ en fonction de n.

B) Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = 2\sqrt[3]{x_n} + \frac{1}{n+1} \end{cases}$

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $x_n > 1$
2. Etudier les variations de la suite $(x_n)$
3. Montrer que la suite $(x_n)$ est convergente.
4. En déduire la limite de la suite $(x_n)$

C) Soit $\theta$ un nombre réel tel que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

La suite $(w_n)$ définie par : $\begin{cases} w_0 = 2cos\theta \\ w_{n+1} = \sqrt{2 + w_n} \end{cases} \forall\, n \in \mathbb{N}$

a) Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction du réel $\theta$.
b) Démontrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a : $w_n = 2cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$
c) Soit $(k_n)$ la suite définie $\forall\, n \in \mathbb{N}$ par : $k_n = \frac{\theta}{2^n}$. Déterminer la limite de cette suite.
d) En déduire que la suite $(w_n)$ est convergente et calculer sa limite.

**Exercice 16 : Suites récurrentes d'ordre 2**

Soit $(u_n)$ une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée des deux premiers termes et par la relation : $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$ ; $n \in \mathbb{N}$

1. On considère la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 3^n v_n$
a. Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de $v_n - v_{n-1}$. Exprimer alors $v_{n+1} - v_n$ en fonction de $v_0$ et $v_1$.
b. Exprimer alors $v_n$ puis $u_n$ en fonction de n , $u_0$ et $u_1$.
2. On suppose que $u_0 = 1$ et $u_1 = 3$.
a. Préciser la nature des suites $(u_n)$ et $(u_n)$.
b. Exprimer en fonction de n , $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ .
c. Etudier la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 17 : Suites Adjacentes**

**Définition :** Deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que $(u_n)$ est croissante, $(v_n)$ est décroissante, que pour tout entier $n, u_n < v_n$ et que $\lim(u_n - v_n) = 0$ sont dites adjacentes. Deux suites adjacentes ont la limite. Tout nombre réel défini par des suite adjacentes.

I-) **Préliminaire :** Montrer que pour tout réel $a$ $et$ $b$ strictement positif tel que $a \geq b$ alors : $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a-b}$ .

II-) Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites définies par : $\begin{cases} 0 < u_0 < v_0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \forall n \geq 0 \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \forall n \geq 0 \end{cases}$

1-) Démontrer par récurrence sur $n$ que $(u_n)$ et $(v_n)$ sont des suites strictement positives.

2-)a-) Calculer $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2$ et en déduire que $\forall n \geq 0,\ u_n \leq v_n$

b-) Démontrer que $(u_n)$ est croissante et $(v_n)$ est décroissante .

c-) Démontrer par récurrence sur $n$ que $\forall n \geq 0$, on $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$ .

d-) Que peut-on dire des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ ? Montrer qu'elles convergent vers la même limite.

**Exercice 18 : Suites emmêlés**

Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ les suites réelles définies sur $\mathbb{N}$ par : $a_0 = 2$, $b_0 = 4$ et pour tout entier naturel $n$, $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 3b_n)$ et $b_{n+1} = \frac{1}{4}(3a_n + b_n)$.

1) Soit $(u_n)$ la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = a_n + b_n$ ·

Montrer que la suite $(u_n)$ est constante.

2) Soit $(v_n)$ la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = a_n - b_n$ ·

a) Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique convergente.

b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

3) Exprimer $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$. Montrer que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ convergent vers la même limite.

**Exercice 19 : Suites imbriquées**

Soient deux suites $(u_n)$ $et$ $(v_n)$ telles que : $u_0 = v_0 = \frac{1}{2}$ ; $\begin{cases} u_{n+1} = 0{,}6u_n + 0{,}3v_n \\ v_{n+1} = 0{,}4u_n + 0{,}7v_n \end{cases}$

On pose alors pour tout entier naturel $n$: $\begin{cases} a_n = u_n + v_n \\ b_n = 4u_n - 3v_n \end{cases}$

1) Montrer que $(a_n)$ est constante.
2) Montrer que $(b_n)$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
3) En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$, puis celle de $v_n$ en fonction de $n$.
4) Démontrer que $(u_n)$ converge et donner sa limite

**Exercice 20 : Méthode de HERON**

A. **Approche de racine de $\sqrt{2}$**

1) a) Pour tout réel a strictement positif, montrer que $\sqrt{2}$ est compris entre a et $\frac{2}{a}$

b) Montrer que, pour tout réel $a \succ 0$ : $\sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$

2) Soit la suite $(U_n)$ définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{2}{U_n}\right) \end{cases}$

a) Montrer que la suite $(U_n)$ est positive et minorée par $\sqrt{2}$

b) Montrer que $\boldsymbol{U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2U_n}(2 - U_n^2)}$. En déduire que $(U_n)$ est décroissante

3) Démontrer que, pour tout entier naturel : $\boldsymbol{U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2U_n}\left(U_{n+1} - \sqrt{2}\right)^2}$

4) a) Démontrer que : $U_n - \sqrt{2} \leq 1$, puis que $0 < U_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(U_n - \sqrt{2}\right)$

b) En déduire que : $0 \prec U_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{U_n} = \sqrt{2}$

B. **Généralisation : approche de $\sqrt{a}$**

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} v_0 > 0 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{a}{v_n}\right) \end{cases}$ avec a un nombre réel non nul et $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour quelle valeur de $v_0$ la suite $(v_n)$ est – elle constante ?
2. Montrer quelque n de $\mathbb{N}$, $v_n > 0$
3. On suppose dans la suite : ${u_0}^2 - a \neq 0$

a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ : $v_n \neq \sqrt{a}$

b- Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2v_n}\left(v_n - \sqrt{a}\right)^2$

c- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$,$v_{n+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2v_n}\left(v_n + \sqrt{a}\right)^2$

d- Montrer que si $(v_n)$ est convergente alors elle converge nécessairement vers $\sqrt{a}$

e- Montrer que $(v_n)$ est strictement décroissante et qu'elle est convergente. Calculer sa limite.

4. Soit pour tout n de $\mathbb{N}$ : $w_n = \frac{v_n - \sqrt{a}}{v_n + \sqrt{a}}$

a- Calculer $w_{n+1}$ en fonction de $w_n$.

b- En déduire $w_n$ en fonction de n et $w_0$

c- Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

5. On suppose que : $v_0 = \frac{3}{2}\sqrt{a}$

a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ : $v_n > \sqrt{a}$

b- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ : $v_{n+1} - \sqrt{a} < \frac{1}{2}(v_n - \sqrt{a})$

c- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ : $v_n - \sqrt{a} < \left(\frac{1}{2}\right)^n \sqrt{a}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

**Correction de la récréation mathématique :**