Axlou Toth pour l'Innovation

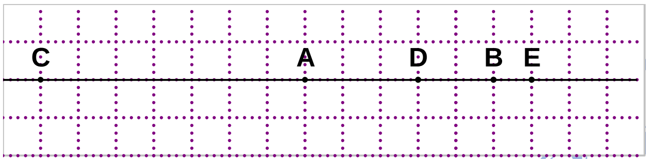
NIVEAU : SECONDE S

PRODUIT SCALAIRE

Exercice 1 :

Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ sachant que $AB = 5, AC = 7$ et $DC = 10$.

1) On a choisi les points A, B, C, D et E sur une droite munie d'une graduation régulière comme l'indique la figure (l'unité de longueur choisie est la longueur de [BE]).



Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DE}$.

2) Déterminer la valeur exacte du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le cas où :

$AB = 3, AC = 4\sqrt{3}$ et $\widehat{BAC} = \frac{5\pi}{6}$.

3) Soient trois points M, N, P tels que : $MN = 3, MP = 7$ et $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = -18$.

Déterminer une valeur approchée de la mesure en degrés de $\widehat{NMP}$.

Exercice 2 :

La figure ci-contre représente un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 5$ et $BC = 3$;

Un triangle ABF équilatéral et un triangle BCE rectangle et isocèle en C.

Le point H est le milieu du segment $[AB]$.

Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$; **2)** $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE}$;

3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$; **4)** $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CE}$;

5) $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA}$; **6)** $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CE}$.

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 4. On note A' le milieu du segment [BC].

1) Faire une figure et calculer la valeur exacte de la distance AA'.

2) Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'}$.

3) Calculer $\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)^2$. En déduire $\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\|$.

Exercice 4 :

$ABCD$ est un carré de côté a. I, J et K sont les points du plan tels que : $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

1) Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{KJ}.\overrightarrow{IJ}$; $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AJ}$; $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{AI}$.

2) a) Calculer IJ et IK.

b) Calculer $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}$ de deux façons différentes.

En déduire une valeur approchée par défaut de l'angle $\widehat{KJI}$.

3) Soient M et N les milieux respectifs de $[DC]$ et $[BC]$.

Montrer que la droite (DN) est perpendiculaire à (AM).

Exercice 5 :

1) Démontrer, en utilisant des vecteurs normaux, que deux droites d'équations respectives :

$ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont orthogonales si et seulement si $aa'+bb'=0$.

2) Démontrer que deux droites d'équations respectives :

$y=mx+p$ et $y=m'x+p'$ sont orthogonales si et seulement si $mm'=-1$.

Exercice 6 :

On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, le point A tel que : $OA=3$ et $(\vec{i},\overrightarrow{OA})=\frac{\pi}{3}$.

1) Calculer les coordonnées de A.

2) Calculer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur la première bissectrice (droite d'équation $y=x$).

3) En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

Exercice 7 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soient $A(-2;0)$, $B(3;-1)$ et $C(4;2)$.

1) Déterminer un vecteur normal et un point de la médiatrice (Δ) du segment $[AB]$.

En déduire une équation cartésienne de (Δ).

2) Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice d'un autre côté du triangle ABC.

3) Calculer les coordonnées du centre I du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 9 :

Soit (C) un cercle de diamètre $[AB]$, H un point de $[AB]$, (D) la perpendiculaire à (AB) en H.

Soit M un point de (C). La droite (BM) coupe (D) en N.

1) Démontrer que : $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BA}$.

2) En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BN}$ reste constant lorsque M décrit (C).

Exercice 10 : **Relation d'Euler**

Soit un triangle ABC.

1) Démontrer que, pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

2) Utiliser cette égalité pour montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 11 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère les points A(1 ;2) et B(3 ;0).

1) Déterminer par une équation l'ensemble (E) des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 3$.

2) Quelle est la nature de cet ensemble ?

3) Peut-on trouver un point P sur (y'y) tel que $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = 3$?

4) Déterminer par une équation l'ensemble (F) des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = 3$.

5) Déterminer l'ensemble (E)∩(F) à l'aide des équations trouvées pour (E) et (F).

6) Déterminer (E)∩(F) sans utiliser les équations de (E) et (F).

Exercice 12 : **Distance d'un point à une droite**

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère la droite (D) : $2x - 3y + 1 = 0$.

1) Préciser les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ normal à la droite D.

2) Soit A un point du plan. Notons x_A et y_A ses coordonnées. Soit H le projeté orthogonal de A sur D.

Démontrer que : $\vec{u}.\overrightarrow{HA} = 2x_A - 3y_A + 1$. En déduire que $AH = \frac{|2x_A - 3y_A + 1|}{\|\vec{u}\|}$.

3) Applications numériques :

a) Calculer la distance du point $A(7;4)$ à la droite (D), puis la distance du point $B(2;6)$ à (D).

b) Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) de centre $\Omega(-1;-3)$ et tangent à la droite d'équation $x - y + 4 = 0$.

Exercice 13 :

Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 3 et soit A le point de coordonnées $(0;6)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) Déterminer une équation du cercle (C).

2) Soit $m \in \mathbb{R}$ et (D_m) la droite passant par A de coefficient directeur m.

Donner une équation de (D_m).

3) Démontrer que les abscisses x des points communs à (C) et (D_m) sont les solutions de l'équation :

$(1 + m^2)x^2 + 12mx + 27 = 0$ (E).

4) a) Calculer le discriminant Δ_m de (E).

b) Pour quelles valeurs de m l'intersection de (C) et (D_m) ne contient-elle qu'un seul point ?

c) En déduire les équations des tangentes à (C) passant par A ?

Exercice 14 :

Dans un plan, muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points : $A(2;1)$; $B(5;7)$; $C(3;-1)$ et $D(5;5)$. On note Δ l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 27$ et Γ le cercle de diamètre $[CD]$.

1) a) Déterminer une équation de Δ et Γ.

b) Vérifier que $H(-1;7)$ est un point de Δ et que $E(1;1)$ est un point de Γ.

c) Construire Δ et Γ.

2) a) Résoudre le système (S) : $\begin{cases} x + 2y - 13 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0 \end{cases}$.

b) Que peut-on en déduire ?

3) Déterminer l'équation réduite de la tangente (D) à Γ au point E puis la tracer.

4) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de Γ avec les axes du repère.

Exercice 15 :

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les droites (D_1), (D_2) et (D_3) définies par : $(D_1) : y = -5$; $(D_2) : \begin{cases} x = -8 + t \\ y = -3 + t \end{cases}$; $(D_3) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$.

1) Donner une équation cartésienne de chacune des droites (D_1), (D_2) et (D_3) et les construire.

2) Ces droites déterminent un triangle ABC avec $\{A\} = D_2 \cap D_3$, $\{B\} = D_1 \cap D_3$ et $\{C\} = D_1 \cap D_2$.

Déterminer les coordonnées des points A, B et C.

3) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux.

En déduire que O est l'orthocentre du triangle ABC.

4) Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) circonscrit au triangle ABC.

(On précisera son rayon et les coordonnées de son centre I).

5) On désigne par A', B' et C' les milieux de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ et par M, N, P les symétriques de O par rapport aux points A', B' et C'. Déterminer les coordonnées de M, N et P.

Vérifier que ces trois points sont sur (C).