Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2019-2020 **Lycée :** Cours d'encadrement Scientifique de Axlou Toth	**Série d'Exercices n°7** **Produit Scalaire**	**Niveau** : 1S1/C **Professeur** : M. Diallo

Exercice 1 :

ABCD est un trapèze rectangle en C et D, E un point de $[DC]$; $AD = 3$; $DE = 1$; $BC = 4$

1) a) Calculer $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{EC}$
   b) Montrer que : $(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$
   c) Calculer en déduire que $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = 9$
2) a) Calculer EA et EB puis $\cos\widehat{AEB}$
   b) En déduire que $AB = \sqrt{17}$
   c) Calculer $\cos(\widehat{ACB})$
3) a) Montrer que $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$
   b) Calculer alors $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE}$
   c) En déduire que les droites (CA) et (BE) sont orthogonales

4) On munit le plan $\wp$ par le repère orthonormé $(D;\overrightarrow{DJ};\overrightarrow{DE})$ avec J le point défini par:

$\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$. Soit l'ensemble $\Gamma = \{M \in \wp / \overrightarrow{MA}.\ \overrightarrow{MC} = 6\}$

Montrer que Γ est un cercle que l'on caractérisera

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle isocèle tel que $AB = AC = 5$ et $BC = 6$.

1) Montrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 7$
2) Soit I le milieu de [BC] et G le barycentre de $\{(A\,;2),(B\,;3),(C\,;3)\}$
   Montrer que G est barycentre de $\{(A\,;2),(I\,;6)\}$ et construire G puis vérifier la distance $AG = 3$.
3) Soit f l'application du plan qui à tout point M du plan associe f(M) définie par :
   $f(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$
   a) Montrer que $f(M) = f(G) + 4MG^2$ et Calculer f(A) et f(G).
   b) Déterminer et représenter l'ensemble (Q) des points M vérifiant : $f(M) = f(A)$.

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4, AC = c$ et $BC = 8$, on désigne par I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$.

1) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$
2) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis en déduire $\cos\widehat{BAC}$
3) Soit H le projeté de B sur (AC), Calculer AH

4) Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$, en déduire $\overrightarrow{BJ}$
5) a) Montrer que pour tout point M du plan on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 8$
   b) Calculer CI
   c) Déterminer l'ensemble $E = \{ M \in P | MA^2 + MB^2 = 100\}$
6) Montrer que pour tout point M du plan, on 'a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MJ^2 - 9$
7) Calculer $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}$, déduire l'ensemble $E' = \{ M \in P | \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 7\}$
8) Soit O le milieu de $[IJ]$
   a) Montrer que $MI^2 - MJ^2 = 2\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{OM}$
   b) Déterminer l'ensemble

$$E" = \{ M \in P | MA^2 + MB^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 6\}.$$

Exercice 4 :

On considère dans le plan $\wp$ deux points A et B tels que $AB = 5$ et I milieu de [AB]

1) Soit C un point de $\wp$ vérifiant: $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 10$. Vérifier que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ puis construire C.

2. Placer les points D et E définis par: $\overrightarrow{AD} = -\frac{7}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

a)Calculer les produits scalaires: $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$

b)En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BE}$

c)Que représente la droite (CD) pour le triangle BED?

3. a)Vérifier que E est le barycentre des points pondérés (A, 1) et (C, −3)

b)Montrer que pour tout point M du plan, on a $3\overrightarrow{MC}^2 - \overrightarrow{MA}^2 = 2\overrightarrow{ME}^2 - 24$

c)En déduire l'ensemble des points M du plan tel que: $\frac{MA}{MC} = \sqrt{3}$

4. Le point E se projette orthogonalement sur (AB) en K.

a)Calculer la distance AK

b)Déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tel que: $MA^2 - MB^2 = 5$

Exercice 5 :

1) Soit A et B sont deux points tels que $AB = 3$. Déterminer et construire l'ensemble du point M du plan dans tels que :
   a) $3MA^2 - 2MB^2 = 10$; b) $\overrightarrow{AB}.(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = -3$; c) $(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) = 0$.
2) Soit A et B du plan tel que $AB = 3$ .Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

a-) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 2$; b-) $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$; c) $MA^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

3) Dans le plan, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 3a$ et $AC = 2a$ (où a désigne un nombre réel strictement positif).
   a) Déterminer le point G barycentre de $(A, 1), (B, 2)$ et $(C, 3)$. Quel est l'ensemble E des points M du plan tels que $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 = 48a^2$?
   b) Quel est l'ensemble F des points M du plan tels que $MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 30a^2$?

(On vérifiera que C est un point de cet ensemble.)

Exercice 6 :

I) On donne $AB = 2$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

1) $1 \leq \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} \leq 3$; 2) $MA^2 + MB^2 \leq 5$; 3) $-MA^2 + 2MB^2 \prec 1$.

II) 1) Soit A et B deux points distincts tels que $AB = 6$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que : $0 \leq \left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right).\overrightarrow{AB} \leq 6$

2) Soit A et B distincts tels que $AB = 4$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $12 \leq MA^2 + MB^2 \leq 24$

Exercice 7 :

I) Le plan est rapporté à un repère orthonormé (Ox, Oy), on considère les trois points $A(2,3), B(-2,-1)$ et $C(1,-1)$.
Former l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC et déterminer le centre et le rayon de ce cercle.

II) Former l'équation du cercle (C) qui passe par les points $A(0,-2)$ et $B(4,0)$ et a son centre sur la droite (D) d'équation $x + 2y = 0$.

Exercice 8 :

I) Soit $(D): 3x + 4y + 1 = 0$ et $(D'): 3x - 4y - 1 = 0$.

Déterminer l'ensemble des points M du plan équidistants aux droites (D) et (D').

II) Discuter, suivant les valeurs du réel m, la nature de l'ensemble (E) dont on donne une équation :

1) $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 - m^2 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - m^2 + 5m + 5 = 0$; 3) $x^2 + y^2 + 2mx - 2y + 4 = 0$.

Exercice 9 : Formule des sinus

ABC est un triangle quelconque. On pose AB = c , AC= b et BC= a

1 . Montrer les relations suivantes

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA \quad ; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2accosb \quad \text{et} \quad c^2 = b^2 + a^2 - 2bacosC$$

2. Soit H le pied de la hauteur issue de C .

Démontrer que l'aire S du triangle ABC est donne par $S = \frac{1}{2}bcsinA$.

En déduire que $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = \frac{abc}{2S}$

3. Soit Ω le cercle circonscrit du triangle ABC , O son centre et D le point diamétralement opposé à B

On désigne par R le rayon de Ω

Montrer que $\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = 2R$

Exercice 10 : Formule d'Héron

Soit un triangle ABC d'aire S. On pose BC=a, CA=b et AB=c et BAC=A

1) Exprimer $\cos^2 A$ en fonction de a, b et c puis $\sin^2 A$ en fonction de b,c et S
2) En déduire l'égalité $16S^2=4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$
3) On note p le demi-périmétre du triangle ABC. En utilisant la relation précédente démontrer la formule de Héron $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
4) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).Démontrer que $AH=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Exercice 11 :

Soit ABC un triangle équilatérale de coté m.

1) I est le barycentre de $(B,4)$ et $(A,1)$et J le barycentre de $(C,2)$et $(A,3)$; calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de m. prouver que la droite (IJ) est orthogonal à la droite (AC).
2) Soit a,b,c trois réels on désigne K le barycentre de (B,b) et (A,a) et L le barycentre de (C,c) et $(A,a+b-c)$; montrer que les droites (AC) et (KL) sont orthogonaux si et seulement si, $b=2c$.

Exercice 12 : Puissance d'un point

Dans un plan, soit un cercle (Ψ) de centre Ω et rayon R, et M un point quelconque. On mène par M une droite sécante au cercle (Ψ) qui le coupe en deux points A et B. A' est le point de (Ψ) diamétralement opposé à A.

1) a) Etablir que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$. Montrer alors que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\Omega M^2-R^2$.
   b) En déduire que ce produit scalaire est indépendant de la sécante issue de M.
2) On pose $\rho(M)=\Omega M^2-R^2$, ($\rho(M)$ est appelé la puissance du point M par rapport à (Ψ).)
3) Lorsque M est extérieur à (C) . Soit T le point de contact d'une tangente à (C) issue de M, montrer que $\rho(M)=MT^2$
4) Etudier le signe de la puissance de M pour (Ψ) suivant sa position par rapport à (Ψ).
5) On donne deux cercles (C) de centre O et de rayon 3 et (C') de centre O' et de rayon 4 tel que la distance $OO'=5$. Quel est l'ensemble des points dont les puissances par rapport aux deux cercles sont égales (l' ensemble de ces points est une droite appelé axe radical).

Exercice 13 : La droite d'Euler

Soit ABC un triangle de centre gravité G, on désigne par A',B' et C' les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB] et par O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Soit H un point du plan.

Partie A :

1) Montrer que : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$
2) Dans la suite, le point H désigne l'orthocentre du triangle ABC.
   a) Déduire de la question précédente que $3\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OH}$ est orthogonale à $\overrightarrow{BC}$.
   b) Démontrer que $3\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$.
   c) En déduire que les points O,G et H sont alignés.

Lorsque les points O,G et H ne sont pas confondus, la droite qu'ils définissent s'appelle **la droite d'Euler** du triangle ABC.

Partie B :

On suppose que le triangle n'est pas équilatéral. On rappelle que O,G et H sont alignés et R le rayon du cercle circonscrit.

1) Soit M un point de (OH) défini par : $\overrightarrow{MO}=k\overrightarrow{MH}$ (k $réel$).

Montrez que :$MA^2 + MB^2 + MC^2 - k(k+2)MH^2 = 3R^2$

2) Soit G′ le symétrie de O par rapport à G.
Montrez que : $G'A^2 + G'B^2 + G'C^2 = 3R^2$.

3) Montrez que : $HA^2 + HB^2 + HC^2 - HO^2 = 3R^2$

Partie C :

Dans cette partie on désigne par I le milieu de [HA] .

1) Montrez que $[OH]$ *et* $[IA']$ on même milieu et que $AH^2 = 4R^2 - a^2$.
2) Soit $\Delta(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2 - (MH^2 + 2MO^2)$.
Montrez que $\Delta(M)$ est indépendante du point M.
3) En prenant M *en* A, montrez que : $\Delta(M) = a^2 + b^2 + c^2 - 6R^2$. Déduisez-en la relation $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

Exercice 14 :

ABC un triangle quelconque $AB = c$, $AC = b, BC = a$ et G centre de gravité de ABC

Partie I :

1) Montrer que $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$

2) Montrer que tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

3) A' milieu de $[BC]$, B' milieu de $[AC]$, C' milieu de $[AB]$

a) Calculer de deux manières $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)^2$

b) En déduire que :

$$2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}$$

c) On considère les points communs aux deux cercles de diamètre $[AA']$ et de diamètre $[BC]$. Ecrire le système traduisant les points communs M aux deux cercles.

d) Montrer que lorsqu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G dont on précisera le rayon

4)

a) Calculer :$(b^2 - c^2)GA^2 + (c^2 - a^2)GB^2 + (a^2 - b^2)GC^2$

b) En déduire l'ensemble $(\mathcal{E})$ des points M du plan tels que :
$(b^2 - c^2)MA^2 + (c^2 - a^2)MB^2 + (a^2 - b^2)MC^2 = 0$

c) Préciser deux points particuliers du triangle qui appartiennent à $(\mathcal{E})$ et tracer $(\mathcal{E})$.

Partie II :

Soit M un point intérieur au triangle ABC

1) A'' le point d'intersection de (AM) et (BC). Montrer que :

$$\frac{A''B}{aire(MAB)} = \frac{A''C}{aire(MAC)}$$

En déduire A'' barycentre de B et C

2) En déduire que M est barycentre de A, B, C affectés respectivement de :$aire(MBC), aire(MAC), aire(MAB)$

3) En déduire :

a) Le centre I du cercle inscrit au triangle ABC est barycentre de (A, a) , (B, b) , (C, c)
b) L'ensemble des points du plan tels que :
$aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 = abc$
c) $Aire(GAB) = Aire(GAC) = Aire(GBC)$.

Exercice 15 :

On considère l'application g du plan dans IR qui à tout point M associe le réel g(M) défini par : $g(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$ et G le barycentre des points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ).
1-)Démontrer que $g(M) = (\alpha + \beta + \gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2$.
2-) Déterminer g(A), g(B) et g(C).
3-)Montrer que $\alpha g(A) + \beta g(B) + \gamma g(C) = 2(\alpha + \beta + \gamma)g(G)$.
4-)En déduire que $g(G) = \frac{\beta\gamma BC^2 + \gamma\alpha AC^2 + \alpha\beta AB^2}{\alpha + \beta + \gamma}$.
5-) **Application**
a-)Construire le barycentre G des points (A,-1), (B, 4) et (C, 1).
b-) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que

$$-MA^2 + 4MB^2 + MC^2 = \frac{a^2}{2}$$

Exercice 16 :

Dans tout ce qui suit P désigne le plan. Soit ABC un triangle rectangle en A. On pose $BC = a, AC = b$ et $AB = c$. Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

1) Montrer qu'on a : $b^2 = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BC}$ et $c^2 = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CB}$
2) a) En orientant la droite (BC), montrer que $b^2\overline{HB} + c^2\overline{HC} = 0$.
   b) En déduire que le point H est le barycentre du système $\{(B, b^2); (C, c^2)\}$.
3) Montrer que pour tout point M du plan on a : $b^2MB^2 + c^2MC^2 = a^2MH^2 + bc^2$
4) Déterminer les ensembles suivants
   a) $E_1 = \{M \epsilon P\ / b^2MB^2 + c^2MC^2 = 2b^2c^2\}$
   b) $E_2 = \{M \epsilon P\ / a^2MA^2 + b^2MB^2 + c^2MC^2 = 2b^2c^2\}$.

Application : Construire E_1 $et E_2$ pour $AB = 3, AC = 4$ et $BC = 5$.

Exercice 17 :

1-) Soit ABC un triangle tels que $AC = b$, $BC = a$ et $AB = c$.
Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :
$MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = b^2 + c^2$
2-)Soit G les barycentre des points pondérés (A, α) , (B, β) et (C, γ) .
Soit (E) l'ensemble des points M du plan vérifiant :
$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = 1$
a-)Montrer que si A, B et C sont des éléments de (E) alors
$\alpha = \frac{cos\hat{A}}{bc}$, $\beta = \frac{cos\hat{B}}{ac}$ et $\gamma = \frac{cos\hat{C}}{ab}$
b-) Montrer que, pour les valeurs de α , β et γ trouvés en a-) , (E) est un cercle circonscrit au triangle ABC .

Exercice 18 :

Dans le plan euclidien $\wp$, on considère trois points non alignés A, B et C.

Soit f l'application de $\wp$ dans $\mathbb{R}$, qui à tout point M du plan, associe le réel :

$$f(M) = MA + MB + MC$$

On se propose de démontrer que f atteint un minimum qui est atteint en un seul point.

(C'est-à-dire qu'il existe un unique point T tel que $f(T) \leq f(M)$ pour tout point M de $\wp$).

Soient M et N deux points distincts du plan et I milieu de $[MN]$

1) a) Montrer que pour tout point P du plan distinct de M et N, on a :
$$4IP^2 = MP^2 + NP^2 + 2MP \times NP\cos(\widehat{MPN})$$
   b) En déduire que pour tout point $\wp$ du plan
$$IP \leq \frac{1}{2}(MP + NP)$$
   A quelle condition a-t-on l'égalité ?

   c) Montrer que : $f(I) < \frac{1}{2}\big(f(M) + f(N)\big)$
2) En déduire que si f admet un minimum alors il est atteint en seul point.

Exercice 19 : Relation de Stewart

Partie A :

Soit A, B, C trois points alignés. L'on se propose de démontrer la relation suivante dite de **Stewart** :
$$\overline{BC}.MA^2 + \overline{CA}.MB^2 + \overline{AB}.MC^2 + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0$$

1) Justifier que $\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB} = 0$
2) On définit les fonctions scalaire et vectorielle d'ordre 3 de **Leibniz** suivantes (**vous retrouverez la généralisation au niveau de la série thématique**)
$$g(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2, \overrightarrow{f(M)} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$$

Soient M et P deux points du plan, montrer que :$g(M) = g(P) + \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{f(P)} + (\alpha + \beta + \gamma)MP^2$

3) Montrer que pour tout point M du plan :
$$g(M) = g(A) + 2\overrightarrow{MA}.\vec{V} \text{ avec } \vec{V} = \overline{CA}.\overrightarrow{AB} + \overline{AB}.\overrightarrow{AC}$$
4) Montrer que $\vec{V} = \vec{0}$ et en déduire que pour tout point M du plan
$$g(M) = g(A) = \overline{CA}.AB^2 + \overline{AB}.AC^2$$
5) Justifier que $g(M) = \overline{CA}.\overline{AB}.\overline{CB}$ et en déduire la relation de **Stewart.**

Partie B :

Soit un triangle ABC et D le pied de la bissectrice intérieure issue de l'angle $\widehat{A}$.

On pose $AB = c, AC = b, CB = a$ et $AD = d$

1) Faire une figure
2) La parallèle à la droite (AD) passant par C rencontre (AB) en E. Placer E.
   a) Justifier que $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}$
   b) Montrer que $AE = AC$ puis démontrer que : $\frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{a}{b+c}$
3) Appliquer la formule de **Stewart** sur les points (alignés) B, D et C en prenant $M = A$
4) Déduire que $d^2 = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\widehat{A}}{2}$.

Pensée :

« Il n'y a pas de voie royale pour accéder à la géométrie au temple de la géométrie » **Euclide**