Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2019-2020 **Lycée :** Cours d'encadrement d'Excellence Scientifique de Axlou Toth	**Série d'Exercices** **Polynômes :**	**Niveau** : 1S1/C **Professeur** : M. Diallo

Exercice 1 :

On considère le polynôme $P(x)=(m^2-m-2)x^3-(m+1)x^2+(m-2)x+2m-1$

Déterminer le réel m pour que :

a) d°P= 3 ; b) d°P = 2 ; c) d°P = 1

Exercice 2 :

Déterminer les coefficients a et b pour que :

Le polynôme $x^4-6x^3+ax^2+bx+1$ soit le carré d'un autre polynôme.

Exercice 3 :

Soit $P(x) = 2x^4 - x^3 - 10x^2 + 3$

1) Déterminer un polynôme Q(x) et le polynôme R(x) du premier degré, tels que :
   $P(x) = (x^2 - 2x - 1)Q(x) + R(x)$
2) En déduire le reste de la division de P(x) par $\left(x-1-\sqrt{2}\right)$.
3) Déterminer $P(1-\sqrt{2})$.

Exercice 4 :

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 4x - 1$ admettant trois racines α , β et γ

1) Sans calculer ces racines, calculer les nombres

$$A=\alpha+\beta+\gamma \quad ; \quad B=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \quad ; \quad C=\alpha\beta\gamma \quad ; \quad D=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} \quad \text{et} \quad E=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$$

2) a) Effectuer la division de x^7 par P(x)
   b) Calculer $F=\alpha^7+\beta^7+\gamma^7$

Exercice 5 :

Déterminer un polynôme de degré 3 tels que :

P(x) divisé par x^2+x-2 donne un reste $x + 6$

P(x) divisé par $x-\frac{1}{2}$ donne pour reste 1 et de plus $p(-1)=0$.

Exercice 6 :

Soient a et b deux nombres réels distincts. On définit le polynôme P(x) par :

$P(x)=a^2(b-x)+b^2(x-a)+x^2(a-b)$

Démontrer qu'il existe un polynôme P_1 tel que, pour tout nombre réel x :

$P(x)=(x-a)(x-b)P_1(x)$

Quel est le degré de P_1 ? Déterminer P_1. En déduire une factorisation de P(x).

Exercice 7 :

Soit f un polynôme tel que $f(x) = x^5 + ax^4 + b$ où a et b sont de réels.

Trouver les réels a et b pour qu'il existe un polynôme g tel que, pour tout réel x : $f(x) = (x-1)^2 g(x)$

EXERCICE 8 : (Les questions sont indépendantes)

1) Calculer la somme des coefficients du polynôme $P(x) = (1 - x + x^2)^3(1 + 3x - x^2)^2$.

2) Déterminer un polynôme P de degré 2, divisible par (x+1) et dont les restes de la division par (x+2) et par (x-2) sont respectivement 1 et 9.

3) Déterminer les réels m, n et p pour que $P(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 + mx^2 + nx + p$ soit factorisable par (x-2)(x+3)(x-1).

4) Démontrer que $P(x) = (x - 2)^{2n} + (x - 1)^n - 1$ est divisible par $x^2 - 3x + 2$.

5) Démontrer que $P(x) = (x^n - 1)(x^{n+1} - 1)$ est divisible par $(x - 1)(x^2 - 1)$.

6) Démontrer que $P(x) = x^n - n(x - 1) - 1$ est divisible par $(x - 1)^2$.

7) Démontrer que $h(x) = \sqrt{1 + x + x^4}$ n'est pas un polynôme.

8) On considère l'expression $f(x) = \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^3 + \left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)^3$.
Démontrer que f est une fonction polynôme dont on précisera le degré.

9) Déterminer P(x) polynôme de degré 6 divisible par $(x - 1)^3$ et tel que 1 + P(x) soit divisible par x^4.

10) Démontrer que P(x) est divisible par $(x - 1)^3$ si et seulement si P(x + 1) est divisible par x^3.

11) Déterminer a et b pour que $P(x) = ax^7 + bx^6 + 1$ soit divisible par $(x - 1)^2$ puis factoriser P(x).

12) Soit $P(x) = x^4 + x^2 + 1$. Déterminer a et b tels que $x^2 + ax + b$ divise P(x).

13) Soit $P(x) = x^4 + px^2 + q$. Déterminer p et q tels que $x^2 + 2x + 5$ divise P(x).

14) Soit $P(x) = x^3 + \alpha x + \beta$. Démontrer que : P possède une racine double ssi $4\alpha^3 + 27\beta^2 = 0$.

15) Soit $P(x) = x^{200}$. La division euclidienne de P(x) par $x^2 - x - 2$ donne un reste de la forme $\alpha x + \beta$.
Déterminer α et β puis vérifier qu'ils sont des entiers naturels.

16) Soit p(x) un polynôme et q(x) = p(x) + 1. Démontrer que $[p(x)]^{2n} + [q(x)]^n - 1$ est divisible par p(x)q(x).

Exercice 9 :

1) Montrer que si P et Q différents du polynôme nul, alors le produit $P \times Q$ n'est pas le polynôme nul. (Utiliser le degré)
2) En déduire que si le produit $P \times Q$ est nul, alors P ou Q est nul. Cette propriété est-elle vraie pour toutes les fonctions numériques ?
3) Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \begin{cases} 0 & , si\ x \le 0 \\ x^3 - x^2 & , si\ x \succ 0 \end{cases}$

   Vérifier que, pour tout x de IR : $f(x)\left(f(x) - (x^3 - x^2)\right) = 0$.
4) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & , si\ x \le 0 \\ x^3 - 5x & , si\ x \succ 0 \end{cases}$

   Par un raisonnement analogue, montrer que g n'est pas une fonction polynôme.

Exercice 10 :

Soit n étant un entier naturel on désigne par f_n le polynôme défini par : $f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$

Démontrer qu'il existe un polynôme g_n tel que, pour tout réel x : $f_n(x) = (x-1)^2 g_n(x)$

Exercice 11 :

Soit $f_p(x)$ le polynôme de degré $p+1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$f_p(x) - f_p(x-1) = x^p \text{ et } f_p(0) = 0.$$

Soit S_p la somme définie par : $S_p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$.

1) Prouver que $f_p(x)$ est divisible par $(x^2 + x)$
2) Déterminer le polynôme $f_p(x)$ pour $p \in \{1,2,3\}$.
3) En déduire la somme S_p en fonction de n pour $p \in \{1,2,3\}$.

Exercice 12 :

Calcul de la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2$

1) Déterminer tous les polynômes $P(x)$ de degré 3

   Vérifiant $\forall n \in IN^*$ $P(x+1) - P(x) = (2x+1)^2$

   En déduire que : $\forall n \in IN^*$,

$$S_n = 1^2 + 3^2 + \ldots + (2n+1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$$

2) Démontrer qu'il existe un unique polynôme P de degré 3, qui s'annule en 0 et vérifie pour tout nombre réel x : $P(x+1) - P(x) = x^2$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

En déduire que $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Vérifier ce résultat sur quelques exemples n = 5 et pour n = 7

Exercice 13 :

Soit le polynôme $p(x) = a^4(b-x) + b^4(x+a) + x^4(a-b)$.

Où a, b et c sont trois réels distincts.

1) Calculer $p(a)$ et $p(b)$.
2) Soit le polynôme $F(x) = p(x) - p(a)$.
   a) Montrer que $F(x) = p(x) - p(b)$.
   b) Prouver que F(x) est divisible par $(x-a)(x-b)$.

Montrer que F(c) est divisible par $(a-b)(c-a)(c-b)$.Déterminer alors le quotient.

Exercice 14 :

1) a, b et c sont trois réels distincts. On considère le polynôme P défini par :

$$P(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}.$$

Calculer P(a), P(b) et P(c). En déduire que pour tout réel x : P(x) = 1.

2) Soit $P(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

Calculer $P(a), P(b)$ et $P(c)$ puis en déduire que $P(x) = x^2 , \forall x \in \mathbb{R}$

Exercice 15 :

Soit le polynôme

$P_k(x) = (x+1)^{2k} - x^{2k} - 2x - 1 \quad (k \in IN^*)$ et soit $Q(x) = x(x+1)(2x+1)$

1) Montrer qu'il existe un polynôme $R_k(x)$ tel que

$\forall n \in IN^*, \quad P_k(x) = Q(x) R_k(x)$

2) Si oui, expliciter $R_2(x)$ et $R_3(x)$

Exercice 16 :

On appelle polynôme symétrique un polynôme dont les coefficients peuvent se lire indifféremment dans un sens comme dans l'autre.

Exemple : $f(x) = 3x^4 + x^3 - x^2 + x + 3$

Nous allons voir des méthodes permettant de résoudre l'équation $f(x) = 0$.

1) Degré 2 : Soit $f: x \longmapsto ax^2 + bx + a, a \neq 0$

Résoudre $f(x) = 0$ et dans le cas où f admet deux racines distinctes, les comparer.

2) Degré 3 : Soit $f: x \longmapsto ax^3 + bx^2 + bx + a, a \neq 0$
   a) Montrer que 0 n'est pas racine de f et que si x_1 est une racine de f, alors $\frac{1}{x_1}$ est aussi racine de f.
   b) Trouver une racine évidente de f et en déduire une factorisation de f(x)
   c) Discuter le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$
   d) Application :

$f: x \longmapsto 7x^3 - 43x^2 - 43x + 7$

Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et factoriser f(x)

3) Degré 4 : Soit $f: x \longmapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a, a \neq 0$
   a) Montrer que 0 n'est pas racine de f et que si x_1 est une racine de f, alors $\frac{1}{x_1}$ est aussi racine de f.
4) Soit $y = x + \frac{1}{x}$
   a) Déterminer l'expression de $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ en fonction de a, b, c, y et y^2
   b) Montrer que $f(x) = 0$ revient à résoudre successivement deux équations du second degré
   c) Montrer que si $b^2 < 4a(c - 2a), f(x) = 0$ n'a pas de solutions.
   d) Application :

Résoudre l'équation :

$$12x^4 + 11x^3 - 146x^2 + 11x + 12$$

Exercice 17 :

A) Déterminer les polynômes P du second degré tel que $P(x^2) = (x^2 + 1)P(x)$.

B)On se propose de déterminer l'ensemble des polynômes P vérifiant:

$$P(x^2) = (x^2 + 1)P(x) \quad (\mathbf{1})$$

1. Vérifier que le polynôme nul est solution de $(\mathbf{1})$.
2. Soit $P(x) = b$ où $b \in \mathbb{R}$. Montrer que si P est solution de $(\mathbf{1})$ alors $b = 0$
3. Soit P un polynôme non constant de degré n non nul
   a) Donner les degrés des polynômes $P(x^2)$ et $(x^2 + 1)P(x)$
   b) En déduire le degré de tout polynôme P solution de $(\mathbf{1})$
   c) Déduire de la question A) les solutions de $(\mathbf{1})$

Exercice 18 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme tel que $a_n \neq 0$.

1) Montrer que si $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme alors α est une racine $P(x)$.
2) On se propose d'établir la réciproque
   a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) - P(\alpha) = a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1(x - \alpha)$
   b) En déduire que $P(x) - P(\alpha)$ est factorisable par $(x - \alpha)$.
   c) Montrer alors que si α est racine de $P(x)$ alors $P(x)$ est factorisable par $(x - \alpha)$.
3) Déduire de ce qui précède que $P(x)$ est factorisable par $(x - \alpha)$ si et seulement si α est une racine de $P(x)$
4) On suppose que α est une racine $P(x)$. Déterminer en utilisant la question 2) c) le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - \alpha)Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$

Application :

Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des réels tels que $a \neq 0$.

On donne $a = -3, b = -2, c = 0$ et $d = -1$.

a) Montrer que -1 est une racine de $P(x)$.
b) En utilisant la question 4) factoriser $P(x)$.
c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) > 0$.

Pensée :

« En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue »