Axlou Toth pour l'Innovation

NIVEAU : SECONDE S

Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1 :

On considère l'expression $f(x) = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^3 + \left(x - \sqrt{1+x^2}\right)^3$.

1) Vérifier que pour tous réels a et b on a : $(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a^3 + 6ab^2$.

2) En déduire que $f(x)$ est un polynôme dont on précisera le degré.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 2 :

1) Déterminer le polynôme $f(x)$ du troisième degré tel que :

$f(0) = 2$; $f(-1) = 8$; $f(1) = 0$ et $f(2) = 8$.

2) Dans chacun des cas suivants, déterminer (si possible) les réels a, b et c pour que les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ soient égaux :

a) $P(x) = 2x^2 + x - 3$ et $Q(x) = (x+1)(ax+b) + c$.

b) $P(x) = x^3 - 2x^2 - x - 8$ et $Q(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.

Exercice 3 :

Soit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 7x + 12$.

1) Montrer que f est factorisable par $(x-3)$.

2) Factoriser $f(x)$:

a) Par la méthode d'identification des coefficients.

b) Par la méthode de la division euclidienne.

c) Par la méthode de Hörner.

3) Trouver les racines réelles de f.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 4 :

1) Etudier le signe : $\frac{x+1}{4-3x-2x^2}$.

2) Soit $Q(x) = \frac{3x^3-6x^2+x+2}{x-3}$.

a) Etudier le signe de $Q(x)$.

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $Q(x) \geq 0$.

c) Quel est le signe de $Q(11)$, de $Q(\frac{11}{12})$ et de $Q(-\frac{6}{7})$?

Exercice 5 :

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = -x^3 + 7x - 6$.

1) Montrer que 1 est solution de l'équation : $P(x) = 0$.

2) En déduire que $P(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$P(x) = (x-1)(-x^2 + ax + b)$, où a et b sont des nombres réels à préciser.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) = 0$.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $P(x) < 0$.

Exercice 6 :

On considère le polynôme P défini par : $P(x) = -x^4 + 4x^3 + x^2 - 16x + 12$.

1) Montrer que 3 et -2 sont des racines de P.

2) En déduire qu'il existe un polynôme Q tel que : $P(x) = (x^2 - x - 6)Q(x)$.

3) Déterminer le polynôme Q.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-x^4 + 4x^3 + x^2 - 16x + 12 = 0$.

En déduire les solutions de l'équation : $-\left(\frac{x-1}{x}\right)^4 + 4\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 - 16\left(\frac{x-1}{x}\right) + 12 = 0$.

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $-x^4 + 4x^3 + x^2 - 16x + 12 < 0$.

Exercice 7 :

A) 1) Démontrer que le polynôme P défini par $P(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$ est le carré d'un polynôme $Q(x)$ à déterminer.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

B) 1) Déterminer le réel a pour que l'on puisse mettre $(x+2)$ en facteur dans le polynôme $F(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax - 84$.

2) Factoriser le polynôme $F(x)$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $F(x) \leq 0$.

Exercice 8 :

1) Factoriser le trinôme $x^2 - x - 12$.

2) Déterminer les réels a et b pour que le polynôme

$f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 33x^2 + ax + b$ soit divisible par le trinôme $x^2 - x - 12$.

3) a et b étant les valeurs trouvées au 2), résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) l'équation $f(x) = 0$;

b) l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 9 :

Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1$.

1) **a)** Montrer que 0 n'est pas racine de P.

b) Montrer que $P(x) = x^2\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x+\frac{1}{x}\right) + 4\right]$. Indication : Calculer $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$.

2) En posant $U = x + \frac{1}{x}\cdot$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $U^2 - 5U + 4 = 0$.

b) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 10 :

Déterminer un polynôme P à coefficients entiers, tel que $P(a) = 0$.

1) quand $a = \sqrt{2} + \sqrt{5}$.

2) quand $a = \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}$.

Exercice 11 :

On considère le polynôme : $20x^3 - 5x^2 - 3x + 2$. Il a trois racines a, b et c.

Sans calculer ces racines, déterminer :

$a + b + c$; abc; $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$; $(a + b + c)^2$; $a^2 + b^2 + c^2$; $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\cdot$

Exercice 12 :

1) Trouver tous les polynômes P de degré 2 tels que, pour tout réel x, $P(x + 1) - P(x) = x$.

En déduire la somme $1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n$ des n premiers entiers naturels non nuls.

2) Trouver tous les polynômes P de degré 3 tels que, pour tout réel x, $P(x + 1) - P(x) = x^2$.

En déduire la somme $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n - 1)^2 + n^2$, n étant un entier naturel

Exercice 13 :

1) Déterminer les réels, a, b et c tels que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$: $\frac{-2x^2-x+11}{x+2} = ax + b + \frac{c}{x+2}\cdot$

2) Montrer qu'il est possible de déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout x élément de $\mathbb{R}^* \setminus \{1; 2\}$, on ait : $\frac{9x^2-16x+4}{x^3-3x^2+2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}\cdot$

Exercice 14 :

P est le polynôme $x \longmapsto 3x^3 - x^2 - 6x + 2$.

1) Calculer $P\left(\frac{1}{3}\right)$.

2) Factoriser $P(x)$, puis résoudre l'équation : $P(x) = 0$.

3) On pose $h(x) = \frac{3x-1}{P(x)}$.

Déterminer le domaine d'existence de h, puis résoudre l'inéquation $h(x) \geq 0$.

Exercice 15 :

Soit le polynôme P définie par : $P(x) = 6x^3 - x^2 - 32x + 20$.

1) Calculer $P(2)$ et factoriser $P(x)$.

2) Soit la fraction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{6x^3 - x^2 - 32x + 20}{9x^2 - 4}$.

a) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe.

b) Simplifier $f(x)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leq -20$.