Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2019-2020 **Lycée :** Cours d'encadrement Scientifique de Axlou Toth	**Série d'Exercices** **Limite et Continuité**	**Niveau** : 1S2/D **Professeur** : M. Diallo

« Ta seule limite est celle que tu t'imposes »

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants, on demande d'étudier la limite en x_0 de la fonction f.

1) $f(x) = -x^2 + x + 2$; $x_0 = 2$; 2) $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$; $x_0 = 2$; 3) $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1}$; $x_0 = 0$

4) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}{x^2-16}$; $x_0 = 4$; 5) $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$; $x_0 = 3$; 6) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$; $x_0 = 3$;

7) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$; $x_0 = 3$; 8) $\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{4x+8}-4}$; $x_0 = 2$; 9) $f(x) = \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$; $x_0 = 1$;

Exercice 2 :

$\lim\limits_{x\to 0} -x^2 - 2x + 4$; $\lim\limits_{x\to 2} -3x^2 + 2x + 1$; $\lim\limits_{x\to 1} 3x^2 - 4x + 1$; $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-9}{2x^2+6x}$; $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$

$\lim\limits_{x\to -1} \frac{3x^2+4x+1}{-2x^2+3x+5}$; $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-6x+8}{x^3-8}$; $\lim\limits_{x\to -5} \frac{\sqrt{-x}-\sqrt{5}}{x+5}$ $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^3-4x^2-6x+24}{x-4}$; $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$;

$\lim\limits_{x\to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-1}$ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-2}{x^2+4x-5}$ $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{-x-5}{x^2+3x-10}$ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-2}{x^2+4x-5}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3+x-2}{4x^7-x^3+\sqrt{5}}$;

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3+2x^2-5x-6}{2x^2-3x-2}$; $\lim\limits_{x\to 3} \frac{|x^2-9|}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} -x^3 + 2x^2 + 5$; $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^5 - 3x^3 + 7$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{3x+2}{x-5}$;

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{|x^2-3x+2|}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to 3} \frac{3x^2+5x-12}{(x-2)(x+3)}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} -5x^3 - 3x + 4$; 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} -3x^4 + 2x + 1$; $\lim\limits_{x\to -\infty} -4x^3 + 7x^2 + 2$; $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^4 - 3x^2 + 7$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-5x+2}{2x-5}$; 12) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x+7}{x^2-5}$; 13) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2x+7}{x^4+5}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-5x^2+2x-4}{x^2+x+1}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2+2x-4}{x^3-3x+1}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^3+2x-4}{x^2-5x+1}$;

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}$; $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3-x^2-5x-3}{x^3+4x^2+5x+2}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3+5x-8}{7x^3+2x+1}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-x+1}{2x^2-5}$; $\lim\limits_{x\to -3} \frac{\left(\sqrt{x^2+7}-4\right)}{x+3}$; $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-7x+5}{x-1}$

; $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-x}$; $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-1} - x$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+x} - x$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+3} - x$;

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \sqrt{x^2-2x} - 2x$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{x}{\sqrt{x+2}}$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \sqrt{x}$, $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+3}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{3x}-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}-\sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2+7}-x$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}3x-1-\sqrt{9x^2-3}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+3x+1}-x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+3x+1}-x+2$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-6x^2-4x+24}{3x^3-2x+8}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-2x^2}{2x^2-5x-3x^3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x+3}{x^2-4x+1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4+3x+1}{2x^4+x-2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+1}{-2x+5}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)^2(x-5)^3$;

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)\right]$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt{x^4+x^2+2}-(x^2+x+1)\right]$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}$;

Exercice 3 : Calculer la limite de f aux bornes de D_f

$f(x)=\frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$ $f(x)=\frac{3x^2-5x}{5-x}$; $f(x)=\frac{x^2-3|x|}{x\sqrt{x}}$; $f(x)=\frac{x^2-3x-2}{x^2+3x+1}$; $\frac{1}{1-x}$; $\frac{1}{x-1}$; $f(x)=\frac{(2x+1)}{x}$

$f(x)=x-3+\sqrt{x^2-x+1}$; $f(x)=\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2+5x}$; $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; $\frac{x}{\sqrt{|x^2-1|}}$; $f(x)=\frac{5x+1}{x-3}$;

$f(x)=\frac{-x+4}{x+2}$; $f(x)=\frac{3x-2}{-x^2+1}$; $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$; $f(x)=\frac{2x^2+3x-2}{x^2+1}$; $f(x)=\frac{4-5x}{x^2+2x-3}$; $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$;

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$; $f(x)=\frac{2x^2+3x-2}{-x+2}$; $f(x)=\frac{2x^2+3x-2}{-x^2-x+2}$; $f(x)=\frac{x^3+x^2+x-3}{2x^2-3x+1}$;

Exercice 4 : Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{2x}$ **b.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$ **c.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+\tan x\right)$ **d.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2x-1}{x\tan x}$ **e.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan2x}{5x}$ **f.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sin5x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$ **g.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{x\cos x}$ **h.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$ **i.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$ **j.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+\sin x}{x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$ **k.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+\tan x}{\sqrt{x^2}}$ **l.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sin2x}-\frac{1}{2\tan x}$ **m.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin3x}{1-2\cos x}$;**n**

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{x-\frac{\pi}{6}}$;**o.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan2x}$

Exercice 5 : Continuité !

1. Soit la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x)=\begin{cases}\frac{|x(x-1)|}{(x-1)(|x|+1)} & \text{si } x\neq1\\ -\frac{1}{2}, & \text{si } x=1\end{cases}$

a- Exprimer f sans le symbole de valeur absolue.

b- Etudier la continuité de f aux points d'abscisses $x=0$ et $x=1$

2. Dans chacun des cas suivants, dire si f admet une limite en x_0 précisé

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-|x|}{x^2+|x|} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$, $x_0 = 0$; b) $\begin{cases} f(x) = \frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} \\ f(4) = 3 \end{cases}$, $x_0 = 4$, c) $f(x) = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x+2}}$, $x_0 = 1$;

e) $\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} \\ f(-1) = 0 \end{cases}$; f) $\begin{cases} f(x) = \frac{2x-5}{x+4} & \text{si } -4 < x \leq 4 \\ f(x) = \frac{x-\sqrt{5x-4}}{x-4} & \text{si } x > 4 \end{cases}$, $x_0 = 4$

3. Etudier la continuité de f sur son domaine D_f dans les cas suivants

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1\sqrt{x+1}}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^5-x^4+x^3+3}{x+1} \text{ si } x < -1 \\ \frac{4x+4}{\sqrt[3]{2+x}-1} \text{ si } x > -1 \\ 12 \text{ si } x = -1 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(2x)-\cos(x)}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ -\frac{3}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 6 : Continuité !

Etudier la continuité de f en x_0 dans chaque cas :

a) $\begin{cases} f(x) = -3x + 1, \text{si } x < \frac{3}{2} \\ f(x) = x^2 - 1, \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$, $x_0 = \frac{3}{2}$ b) $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 \text{ si } x \leq -2 \\ f(x) = \frac{1}{x+1} \text{ si } -2 < x \leq 0, \\ f(x) = \sqrt{x+1} \text{ si } > 0 \end{cases}$ $x_0 = -2$ et $x_0 = 0$

Exercice 7 : Continuité !

I. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5 & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{\sqrt{x}-3}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

1. f est-elle continue à gauche en 3 ?
2. f est-elle continue à droite en 3 ? conclure.

II. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-3x-6}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = m \end{cases}$

Déterminer la valeur de m pour que f soit continue en 2.

Exercice 9 : Continuité !

1. Déterminer a et b pour que f soit continue sur D_f :

a) $h(x) = \begin{cases} ax^2 + 5x + a & \text{si } x \leq 1 \\ 5x + 2, & 1 < x \leq 2 \\ ax + 2ab, & \text{si } x > 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} f(x) = -2x - 5 \text{ si } x < -2 \\ f(x) = x^2 + ax + b, \text{si } -2 \leq x < 1 \\ f(x) = -x + 6, \text{si } x \geq 1 \end{cases}$;

c) $k(x) = \begin{cases} x^2 - a\sqrt{-x+2} \text{ si } x \leq -2 \\ \frac{x+5}{x-1} \text{ si } -2 < x < 0 \\ x^2 - ab \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

Exercice 10 : Prolongement par Continuité !

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x - 2 \text{ si } x > 1 \\ f(x) = \frac{x+a}{x-2} \text{ si } x \leq 1 \end{cases}$

1) Détermine le réel a pour que f soit continue en 1

2) Trouve le domaine de définition D_f de la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}-1}{3x-9}$,

et détermine un prolongement par continuité en 3 de f

2) La fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2-9}{|x|-3}$ est-elle prolongeable par continuité en -3 ? en 3 ? si oui donner le prolongement.

3) La fonction g définie par : $g(x) = \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$ est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

Exercice 11 : Asymptote

Soient a, b et c trois réels. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{x+3}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère cartésien.

1°/ Déterminer les réels a, b et c pour que (C) passe par le point A $\binom{-1}{1}$ et admette au voisinage de $\pm\infty$ une asymptote d'équation $y = 2x + 1$

Déterminer les points où la tangente à (C) est perpendiculaire à la droite d'équation $y = -x$.

Exercice 12 : Asymptote et position relative

Soit la fonction f définie sur IR par :

$f(x) = \sqrt{9x^2 + 6x + 5}$.

1. a) Donner le domaine de définition de f.

b) Calculer les limites de f en +∞ et en -∞.

2. Déterminer alors : $\lim_{x\to-\infty} [f(x) + (3x + 1)]$ et $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (3x + 1)]$

3. En déduire que ζ_f admet deux asymptotes obliques au voisinage de +∞ et de -∞.

4. a) Montrer que pour tout réel x :

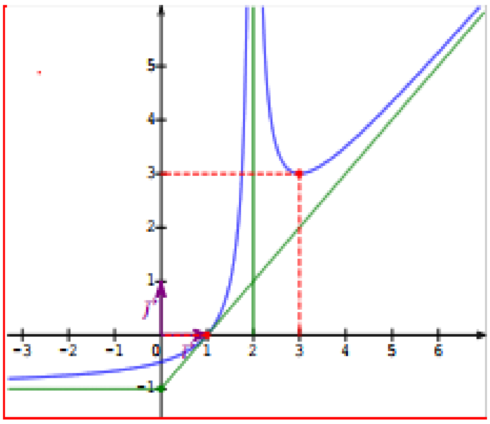
$9x^2 + 6x + 5 > (3x + 1)^2$

b) En déduire les positions de ζ_f par rapport a ses asymptotes.

Exercice 13 : Lecture graphique des limites

La courbe C_f ci-contre est celle d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

On sait que les droites d'équations $y = x + 1, x = 2$ *et* $y = -1$ sont des asymptotes à la courbe C_f.



1. Par une lecture graphique, déterminer :
   a. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{f(x)+1}$.
   b. $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{f(x)}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)-x}$ *et* $\lim_{x\to2} \frac{f\circ f(x)}{f(x)}$
   c. $\lim_{x\to2} f(x)$ *et* $\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$.
2. Soient $g : x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ *et* $h = g \circ f$.
   a. Déterminer l'ensemble de définition de h.
   b. Montrer que la fonction h est prolongeable par continuité en 2.

Exercice 14 : Asymptote et position relative

I. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2+3x+4}{x+2}$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x ≠ -2, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$

2. a) En déduire l'existence d'une asymptote oblique à ζ_f au voisinage de +∞ et -∞.

b) Préciser la position de ζ_f par rapport à cette asymptote.

c) La courbe ζ_f admet-elle une autre asymptote ? si oui la préciser.

II. Soit la fonction f définie par : $f(x) = x\sqrt{\frac{1}{4x^2+1}}$

1. Montrer que pour tout réel strictement positif, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}$

2. Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, interpréter ce résultat.

3. Montrer que f est impaire, en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Exercice 15 :

1. Soit la fonction f définie par : $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x(x-1)} & \text{si } x \in]-\infty; 1[\\ \sqrt{x^2+3} + ax & \text{si } x \in [1; +\infty[\end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. a) Calculer : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

b) Montrer que la droite Δ :y = 1 est une asymptote à ζ_f au voisinage de -∞.

3. Déterminer a pour que f soit continue en 1.

4. On prend a = -3 : Montrer que pour tout x ≥ 1, $\mathbf{f(x) = x\left(\sqrt{\frac{(x^2+3)}{x^2}} - 3\right)}$

a) Déduire la limite de f lorsque x tend vers +∞.

b) Montrer que pour tout x ≥ 1, $f(x) + 2x = \frac{3}{x+\sqrt{x^2+3}}$, en déduire que la droite D : y = -2x est une asymptote à ζ_f au voisinage de +∞.

Pensée :

« Le propre d'un Grand Homme est de reculer les limites du possible. Même en quittant une modeste place, l'homme de mérite laisse un grand vide, car la sphère de son utilité dépasse toujours les limites de son emploi. De surcroît dans ce monde d'un jour où tout vice est honni, le bien est limité, le mal est infini.»