Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2019-2020 **Lycée :** Cours d'encadrement Scientifique de Axlou Toth	**SÉRIE D'EXERCICES N°12** **Limites et Continuité**	**Niveau** : 1S1/C **Professeur** : M. Diallo

« Ta seule limite est celle que tu t'imposes »

Exercice 1 : Foire aux Limites : Jusqu'à ce que vous atteignez vos limites 😊 !

1) Calculer les limites suivantes :

; $\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{-x^2+5x-4}$; $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^3+4x^2+2x-3}{x^2+5x-6}$; $\lim\limits_{x\to2}\frac{8-x^3}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-2x+3+\sqrt{3}}{-x+\sqrt{3}}$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{2-x+x^2}{1+x-2x^2}$;

$\lim\limits_{x\to1}\frac{-x^2-x+2}{x^2-2x+1}$; $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2+x+1}{1-x}$; $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{x^2+1}{1-x}\right)$; $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3x^2-1}{4-2x}$; $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x^3-8}{x-2}\right)$; $\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$;

$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$; $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$, $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{6x^2+1}-5}{x+2}$; $\lim\limits_{x\to0}x\left[\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2\right]$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{x\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x+2}$

$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$; $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x-\sqrt{x+1}-4}{x^2-2x-3}$; $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-9}}$; $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+2x}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x}}$;

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1}\right)$; $\lim\limits_{x\to4}\frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$; $\lim\limits_{x\to-3}\frac{\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{6-x}-3}$; $\lim\limits_{x\to4}\frac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3x}}{x-1}$;

$\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$; $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$ $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{\sqrt{3x+4}-4}$; $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x-2}}{x^2-x-2}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$

$\lim\limits_{x\to3}\frac{-2x+5}{\sqrt{-2x^2+5x+3}}$; $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-x-1}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to2}\frac{1-\sqrt{2-\sqrt{7-3x}}}{1-\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{5-2x}}}}$

2) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x^2}{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}2x+\sqrt{x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}+x+2)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}-x+3)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x-2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+4x\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x^3+1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-3x)$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-2x)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-3x+1)$; $\lim\limits_{|x|\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+3}-mx)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+x}-x+1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$; ; $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x+3}-x+5)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+5}}-x\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-3x+5}}{x+3-\sqrt{x^2-6x}}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\dots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1})$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2-7x+4})$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x+1}\right)$

3) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$; $\lim\limits_{x\to1}\tan\left[\left(\frac{x+1}{6x}\right)\frac{\pi}{2}\right]$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{12\sin x-6}{4x-\pi}$;

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{x^2+2x-3}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin\pi x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{4x-\pi}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x}{\tan^2x}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3+x}{\cos x-1}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$

;$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 3x}{\sin 2x}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 3x}}$; ; $\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{\sin(\pi x)}{x-1}\right]^2$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{4+\sin x}-2}{x}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$

; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$; $\lim\limits_{x\to a}(a^2-x^2)\tan\frac{\pi x}{2a}$;$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2+x^3}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x}{\tan^2x}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\tan x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\cos(2x)}$;

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos x-1}{4\sin^2x-3}$; $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\frac{2}{\sin 2x}-\frac{1}{\tan x}\right)$;$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right)\tan x$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x-1)\left(1-\tan\frac{x}{2}\right)$

$\lim\limits_{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos(2x)-1}{\cos(3x)}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-1}{\cos 2x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos x-1}{6x-\pi}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\tan 6x}{1-2\sin x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1-2\cos x}{\sin 3x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos x-\sqrt{3}}{6x-\pi}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 3x}{1-\sqrt{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\cos x}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{x}+\cdots\frac{\sin(n-1)}{x}+\frac{\sin nx}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin[\sin(\sin(x))]}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2-x^2\sin x$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2-\sin x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+\sin x}{4x+1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+1}$

; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{2-\sin x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+x)\sin x}{x^2-1}$

Exercice 2 : Fonctions Composées

1) Calculer les limites suivantes en utilisant la composition des fonctions

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left[\left(\frac{x+1}{6x-\pi}\right)\pi\right]$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x^2}{x-1}}$;c) $\lim\limits_{x\to1}\tan\left[\left(\frac{x+1}{6x}\right)\frac{\pi}{2}\right]$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}E\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{4x^2+1}}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi x^2}{2x^2-3}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos^2\left(\frac{\pi x+1}{4x+\sqrt{x}}\right)$

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$.

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)\sin\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

Exercice 3 : La racine Cubique

Soit a et b deux réels strictement positifs.

1. a. Montrer que $a-b=\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}+a^{\frac{2}{3}}\right)$.

b. En déduire que $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{a-b}{a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}+a^{\frac{2}{3}}}$.

2. Etudier les limites ci-dessous :

a. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$; b. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$; c. $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}$; d. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{2x^3+5x+7}-\sqrt[3]{3x^3+7x^2-4}}{x+1}$;

e. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{2x^3+5x+7}-\sqrt[3]{3x^3+7x^2-4}}{x+1}$;f) $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}$; g) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x^2+x}-\sqrt[3]{x+2x^2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2x-x^2}}$

; $\lim\limits_{x\to10}\frac{\sqrt[3]{x+54}-4}{2\sqrt[3]{x+17}-\sqrt[3]{20x+16}}$; $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}\right)$;

Exercice 4 : Tout dépend du paramètre

Calculer les limites suivantes : (on discutera s'il faut les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{4+x-x^3}+mx$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{4-x}-m\sqrt[3]{2-x}$; $\lim\limits_{x\to-2} \frac{(x-n)(x-m)}{x+2}$; $\lim\limits_{x\to1} \frac{n}{x^2-1}-\frac{m}{x-1}$;
$\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x^n}-\sqrt{1+x^m}}{x^n}$ $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$; $\lim\limits_{x\to m^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{m}-\sqrt{x-m}}{\sqrt{x^2-m^2}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{mx^2+(m^2+1)x+m}{x-5}$
$\lim\limits_{x\to m} \frac{x^3-3mx^2+3m^2x-m^3}{x^3-m^3}$; $\lim\limits_{x\to-m} \frac{x^3+m^3}{x^3+3mx^2-3m^2x+m^3}$; $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^{2m}-1}{x^{2n}-1}$ m et n des entiers positifs;
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{mx^3+(m-1)x^2+(m-2)x+(m-3)}{x(x-1)(x-2)}$; $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ $(a>b)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n}\left[\frac{1}{1-x}-(1+x+\cdots+x^n)\right]$

$\lim\limits_{x\to a} \frac{ax^n-xa^n}{x-a}$; $\lim\limits_{x\to1} \frac{nx^{n+1}-nx^n}{x^p-1}$; $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^m-1}{x^3-1}$

Exercice 5 : Avec la fonction partie entière

Soit x un réel. On appelle partie entière de x et on note $E(x)$ l'entier relatif n vérifiant : $n \le x < n+1$. On note $E(x)=n$.

1. **Révision**
   a) Calculer E (-1,5) ; $E(\sqrt{2})$; $E\left(-\frac{1}{2}\right)$.
   b) Montrer que : $\forall x \in IR$ on a : $E(x) \le x < E(x)+1$.
   c) En déduire que $\forall x \in IR$ on a : $0 \le x-E(x) < 1$.
   d) Démontrer que : $E(x) \ge 0$ si, et seulement si, x est positif.
2. Soit x un réel.
   a) Démontrer que : $\forall x \in IR$ on a : $\mathbf{x-1 < E(x) \le x}$.
   b) En déduire que : $\forall x \in IR$ on a : $-\frac{1}{2} \le \mathbf{x - E}\left(\mathbf{x}+\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$
   c) Démontrer que pour tout réel non nul x : $\frac{1-x}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) \le \frac{1}{x}$. Déduire alors $\lim\limits_{x\to0}\left[x^2E\left(\frac{1}{x}\right)\right]$
   d) Démontrer que : $E(x)=x \Leftrightarrow x \in Z$.
   e) Démontrer que $\forall x \in IR$ et $\forall k \in Z$ on a : $E(x+k)=E(x)+k$.
3. Soit $f: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x+E(x^2)}}$.
   a) Montrer que $x+E(x^2)=0$ si et seulement si, x=0 ou x=-1. Déterminer le domaine de définition de f.
   b) Montrer que $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x \in]-1;0[\cup]0;1[$.
   c) Etudier la continuité de f.
4. Soit $g: x \mapsto (-1)^{E(x)}\left[x-E(x)+\frac{1}{2}\right]$.
   a) Montrer que g est périodique de période 2
   b) Monter que : $g(x)=x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in]0;1[$.
   c) Démontrer que : $\forall n \in [n;n+1[$ on a : $g(x)=(-1)^n\left(x-n+\frac{1}{2}\right)$. Etudier la continuité
   d) Construire la restriction de g à $[-6;4]$.

Exercice 6 : Théorème de Comparaison et d'Encadrement

1. Soit la fonction φ définie sur $[0;+\infty[$ par : $\varphi(x)=\frac{\sqrt{x}+\cos x}{\sqrt{x^2+1}}$

a- Montrer que, pour >1, $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2+1}} \le \varphi(x) \le \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x^2+1}}$

b- En déduire la limite de φ en $+\infty$.

2. On désigne par C_k la courbe représentative de la fonction k dans un repère orthonormé. Soit k la fonction définie par : $k(x) = 1 + \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
   a- Etudier suivant les valeurs de $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{k(x)}{x}$.
   b- Interpréter graphiquement ce résultat.

1. On considère la fonction définie sur $[2\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x+\sin x}{x-1}$. Montrer que, pour tout $x \geq 2$, $|f(x) - 3| \leq \frac{4}{x-1}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Soit f la fonction définie : $h(x) = 3x + 2\sin x$
   a- Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $3x - 2 \leq h(x) \leq 3x + 2$
   b- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$
3. soit la fonction l définie sur $\mathbb{R}$ par : $l(x) = \frac{1}{2-\cos x}$
   a- Montrer que pour tout x réelle, $\frac{1}{3} \leq l(x) \leq 1$
   b- En déduire les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2-\cos x};\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2-\cos x};\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{2-\cos x}$$

<u>Exercice 7 :</u> Encore la fonction Partie entière

1. On considère la fonction $E(x)$ la partie entière de x
   Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0} E\left(\frac{1}{x}\right)\sin x\ ;\ \lim_{x\to0} E(2\sin x);\ \lim_{x\to+\infty} \frac{E\left(\frac{x}{2010}\right)}{x}\ ;\ \lim_{x\to0} \sin(\pi E(x));\ \lim_{x\to0} xE\left(\frac{1}{x}\right),\ \lim_{x\to+\infty} \frac{xE(x)+3}{x^2+\sin(x)}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{xE(x)-x}{|x|}\ ;\ \lim_{x\to0} \sqrt{x}E\left(\frac{1}{x}\right);\ \lim_{x\to0} \frac{x}{a}E\left(\frac{b}{x}\right), a, b > 0;\ ;\lim_{x\to0} \frac{E(x)}{x};\ \lim_{x\to0} \frac{E\left(\frac{1}{x}\right)-x}{E\left(\frac{1}{x}\right)+x},$$

2. Calculer les limites suivantes. On pourra au besoin utiliser les théorèmes de comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} (3x^2 - x^2\sin x)\ ;\ \lim_{x\to+\infty} \frac{xE(x)+3}{x^2+\sin(x)};\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin(x)}{2-\sin(x)}\ ;\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2-\sin x}\ ;\ \lim_{x\to0} \frac{x[E(x)-x]}{|x|}\ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)\sin(x)}{x^2-1};\ \lim_{x\to0} x\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sin(x)}\right);\ \lim_{x\to0} \frac{2\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)-\sin\left(\frac{1}{x}\right)+3}{x+\sqrt{x}};$$

<u>Exercice 8 :</u> Continuité !

1. Soit la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{|x(x-1)|}{(x-1)(|x|+1)} & \text{si } x \neq 1 \\ -\frac{1}{2}, & \text{si } x = 1 \end{cases}$
   a- Exprimer f sans le symbole de valeur absolue.
   b- Etudier la continuité de f aux points d'abscisses $x = 0$ et $x = 1$
2. Dans chacun des cas suivants, dire si f admet une limite en x_0 précisé

a) $\begin{cases} f(x) = \frac{2x-5}{x+4} & \text{si } -4 < x \leq 4 \\ f(x) = \frac{x-\sqrt{5x-4}}{x-4} & \text{si } x > 4 \end{cases}$, $x_0 = 4$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} & \text{si } x > 1 \\ \frac{x^2+E\left(\frac{x}{2}\right)}{x+1} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{\sqrt{x^2+5-3}}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$, $x_0 = 1$ et $x_0 = 2$

3. Etudier la continuité de f sur son domaine D_f dans les cas suivants

$$\text{a)}f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1\sqrt{x+1}}{x} \text{ si } x\neq 0\\ \frac{1}{2} \text{ si } x=0\end{cases};\ \text{b) } f(x)=E(x)-\sqrt{x-E(x)};\ \text{c) } f(x)=E(x)\sin(\pi x)$$

$$\text{d) } f(x)=\begin{cases}\frac{x^5-x^4+x^3+3}{x+1} \text{ si } x<-1\\ \frac{4x+4}{\sqrt[3]{2+x}-1} \text{ si } x>-1\\ 12 \text{ si } x=-1\end{cases}\qquad \text{e) } f(x)=\begin{cases}\frac{\cos(2x)-\cos(x)}{x^2} \text{ si } x\neq 0\\ -\frac{3}{2} \text{ si } x=0\end{cases}$$

Exercice 10 : Continuité !

Etudier la continuité de f en x_0 dans chaque cas :

$$\text{a) }\begin{cases}f(x)=-3x+1, \text{ si } x<\frac{3}{2}\\ f(x)=x^2-1, \text{ si } x\geq\frac{3}{2}\end{cases},\ x_0=\frac{3}{2}\quad \text{b) }\begin{cases}f(x)=x^2-1 \text{ si } x\leq -2\\ f(x)=\frac{1}{x+1} \text{ si } -2<x\leq 0,\\ f(x)=\sqrt{x+1} \text{ si } >0\end{cases}\quad x_0=-2 \text{ et } x_0=0$$

Exercice 11 : Continuité !

I. Soit la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases}3x^2-5 & \text{si } x\leq 3\\ \frac{\sqrt{x}-3}{x-3} & \text{si } x>3\end{cases}$

1. f est-elle continue à gauche en 3 ?
2. f est-elle continue à droite en 3 ? conclure.

II. Soit la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases}\frac{3x^2-3x-6}{x-2} & \text{si } x\neq 2\\ f(2)=m\end{cases}$

Déterminer la valeur de m pour que f soit continue en 2.

Exercice 12 : Continuité !

1. Déterminer a et b pour que f soit continue sur D_f :

$$\text{a)}h(x)=\begin{cases}ax^2+5x+a \text{ si } x\leq 1\\ 5x+2, 1<x\leq 2\\ ax+2ab, \text{ si } x>2\end{cases};\ \text{b) }\begin{cases}f(x)=-2x-5 \text{ si } x<-2\\ f(x)=x^2+ax+b, \text{ si } -2\leq x<1\\ f(x)=-x+6, \text{ si } x\geq 1\end{cases};$$

$$\text{c) } k(x)=\begin{cases}x^2-a\sqrt{-x+2} \text{ si } x\leq -2\\ \frac{x+5}{x-1} \text{ si } -2<x<0\\ x^2-ab \text{ si } x\geq 0\end{cases}$$

Exercice 13 : Prolongement par Continuité !

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases}f(x)=x^2-2x-2 \text{ si } x>1\\ f(x)=\frac{x+a}{x-2} \text{ si } x\leq 1\end{cases}$

1) Détermine le réel a pour que f soit continue en 1

2) Trouve le domaine de définition D_f de la fonction f définie par $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}-1}{3x-9}$,

et détermine un prolongement par continuité en 3 de f

3) La fonction f définie par : $f(x)=\frac{x^2-9}{|x|-3}$ est-elle prolongeable par continuité en -3 ? en 3 ? si oui donner le prolongement.

4) La fonction g définie par : $g(x) = \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$ est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

Exercice 14 : Continuité avec la fonction partie entière

Soit $\begin{cases} \mathbf{f(x) = x^2E\left(\frac{1}{x}\right)} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x \neq 0} \\ \mathbf{f(0) = 0} \end{cases}$

a. Donner l'expression de f sur $]-\infty;\ -1]$et sur $]1;\ +\infty[$

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

c. Prouver que $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{]-1, 0[} \cup \mathbf{]0, 1[}$ $\mathbf{on'a} \quad \mathbf{x - x^2 < f(x) \leq x}$

d. Calculer la limite de f en 0.

e. Pour $n \in IN*$ donner l'expression de f sur$\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ **et sur** $\left]\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right]$.

f admet-elle une limite en $\frac{1}{n}$?

Exercice 15 : Continuité avec la fonction partie entière

Soit f la fonction définie par $f(x) = x\left(\frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

1) Montrer que $\forall\, x \in]-1;1[\ , |f(x)| < |x|$
2) En déduire $\lim_{x\to0} f(x)$et un prolongement par continuité de f en o
3) Donner l'expression de f pour $x \in \left]\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right[, n \geq 1$. Calculer $f\left(\frac{1}{n}\right)$. En déduire la continuité de f sur $]0;1[$

Exercice 16 : Asymptote

Soient a, b et c trois réels. On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{x+3}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère cartésien.

1°/ Déterminer les réels a, b et c pour que (C) passe par le point A$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$et admette au voisinage de $\pm\infty$ une asymptote d'équation $y = 2x + 1$

Déterminer les points où la tangente à (C) est perpendiculaire à la droite d'équation$y = -x$.

Exercice 17 : Asymptote et position relative

Soit la fonction f définie sur IR par :

$f(x) = \sqrt{9x^2 + 6x + 5}$.

1. a) Donner le domaine de définition de f.

b) Calculer les limites de f en +∞ et en -∞.

2. Déterminer alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + (3x + 1)]$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (3x + 1)]$

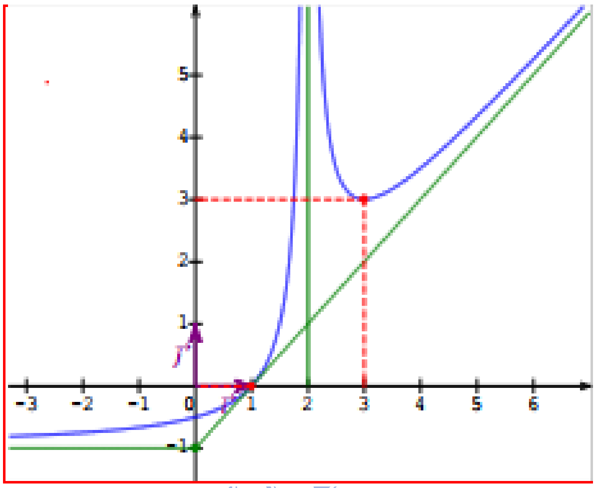
3. En déduire que ζ_f admet deux asymptotes obliques au voisinage de +∞ et de -∞.

4. a) Montrer que pour tout réel x :

$9x^2 + 6x + 5 > (3x + 1)^2$

b) En déduire les positions de ζ_f par rapport a ses asymptotes.

Exercice 18 : Lecture graphique des limites



La courbe C_f ci-contre est celle d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

On sait que les droites d'équations

$y = x + 1, x = 2$ et $y = -1$ sont des asymptotes à la courbe C_f.

1. Par une lecture graphique, déterminer :
   a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{f(x)+1}$.
   b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)-x}$ et $\lim\limits_{x\to2} \frac{f\circ f(x)}{f(x)}$
   c. $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\frac{2x+1}{x-1})$.
2. Soient $g: x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $h = g \circ f$.
   a. Déterminer l'ensemble de définition de h.
   b. Montrer que la fonction h est prolongeable par continuité en 2.

Exercice 19 : Asymptote et position relative

I. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2+3x+4}{x+2}$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x ≠ -2, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$

2. a) En déduire l'existence d'une asymptote oblique à ζ_f au voisinage de +∞ et -∞.

b) Préciser la position de ζ_f par rapport à cette asymptote.

c) La courbeζ_f admet-elle une autre asymptote ? si oui la préciser.

II. Soit la fonction f définie par : $f(x) = x\sqrt{\frac{1}{4x^2+1}}$

1. Montrer que pour tout réel strictement positif, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}$

2. Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, interpréter ce résultat.

3. Montrer que f est impaire, en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Exercice 20 :

1. Soit la fonction f définie par : $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x(x-1)} & \textbf{si } x \in]-\infty; 1[\\ \sqrt{x^2+3} + ax & \textbf{si } x \in [1; +\infty[\end{cases}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. a) Calculer : $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$.

b) Montrer que la droite Δ :y = 1 est une asymptote à ζ_f au voisinage de -∞.

3. Déterminer a pour que f soit continue en 1.

4. On prend a = -3 : Montrer que pour tout x ≥ 1, $\mathbf{f(x) = x\left(\sqrt{\frac{(x^2+3)}{x^2}} - 3\right)}$

a) Déduire la limite de f lorsque x tend vers +∞.

b) Montrer que pour tout x ≥ 1, $f(x) + 2x = \frac{3}{x+\sqrt{x^2+3}}$, en déduire que la droite D : y = -2x est une asymptote à ζ_f au voisinage de +∞.

Exercice 21 :

Soit la fonction f définie sur R\ {1} par : $\begin{cases} \mathbf{f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x \quad si\ x \leq 0} \\ \mathbf{f(x) = \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1}\ si\ x \in]0; +\infty[\setminus \{1\}} \end{cases}$

1. Montrer que pour tout réel x de]0; 1[on a : $\mathbf{\frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq f(x) \leq -\frac{\sqrt{x}}{x-1}}$
2. Montrer alors que f est continue en 0.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}f(x)$
4. On pose $\mathbf{U(x) = \frac{\pi(x-1)}{x}}$; $\mathbf{V(x) = \frac{sinx}{x}}$ et $W(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x}}$ pour tout x de]0; +∞[\ {1}

a- Montrer que pour tout x de]0; +∞[\ {1} on a : $\mathbf{f(x) = W(x).(VoU)(x)}$

b- En déduire que f admet un prolongement par continuité g en 1. Expliciter la fonction g

c- Montrer que l'équation $\mathbf{sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 3\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$ admet au moins une solution dans]1; 2[

Exercice 22 :

On considère la fonction f: [0,2π] → IR définie par : ∀**x** ∈ $\mathbf{]0, 2\pi]}$, $\begin{cases} \boldsymbol{f(x) = sin\left[xE\left(\frac{\pi}{x}\right)\right]\ \ si\ x > 0} \\ \boldsymbol{f(0) = 0} \end{cases}$

1°) Montrer que pour tout réel $\mathbf{t, t - 1 < E(t) \leq t}$.

2°) Calculer la limite quand x tend vers 0 par valeurs supérieures de la fonction définie par :

$$\mathbf{x \mapsto E\left(\frac{\pi}{x}\right) pour\ \ 0 < x \leq 2\pi}$$

En déduire la continuité de f à l'origine.

3°) Résoudre dans $\mathbf{]0, 2\pi]}$ l'équation $\mathbf{E\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0}$, puis l'équation $\mathbf{E\left(\frac{\pi}{x}\right) = k}$, avec k entier naturel non nul . Expliciter f sur les intervalles $\mathbf{\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]}$ **et** $\mathbf{\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]}$.

4°) Expliciter f sur $\mathbf{\left]\frac{\pi}{k+1}, \frac{\pi}{k}\right]}$, k décrivant $\mathbb{N}^*$, en déduire l'étude de la continuité de f en tout point de $[\mathbf{0, 2\pi}]$

5°) Pour k entier naturel strictement positif, posons $\mathbf{y_k = \lim\limits_{x\to\frac{\pi^+}{k}} f(x)}$

Montrons que le point $\mathbf{M\left(\frac{\pi}{k}, y_k\right)}$ appartient à une courbe (S) dont on précisera l'équation , tracer (S) et la courbe représentative (C) de la restriction de f à $\mathbf{\left]\frac{\pi}{6}, \pi\right]}$ à dans un plan où l'on a choisi un repère orthogonal (O ,i ,j) avec $\left\|\vec{\mathbf{i}}\right\| = \mathbf{4cm}$ et $\left\|\vec{\mathbf{j}}\right\| = \mathbf{10cm}$.

Exercice 23 : Une autre caractéristique de la continuité

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1,3]$ par $f(x) = x^2 + x - 2$.

1. Vérifier que la fonction f est continue en 2 .
2. On pose $h = x - 2$.
   a) Montrer que pour tout réel h tel que $|h| \leq 1$, on a : $|\boldsymbol{f(2+h) - f(2)}| \leq \boldsymbol{6|h|}$.
   b) En déduire un réel $\alpha > 0$ tel que si : $|\boldsymbol{x-2}| < \boldsymbol{\alpha}$ ***alors*** $|\boldsymbol{f(x) - 4}| < \boldsymbol{10^{-2}}$.
   c) Le réel α est-il unique ? Sinon quelles autres valeurs de α peut-on choisir pour réaliser l'implication précédente ?
3. D'une façon générale démontrer que :

$$\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}, \exists\ \boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}\ \textbf{\textit{tel que}}\ |\boldsymbol{x} - \mathbf{2}| < \boldsymbol{\alpha}\ \ \textbf{\textit{implique}}\ |\boldsymbol{f(x)} - \mathbf{4}| < \boldsymbol{\varepsilon}$$

Cette propriété caractéristique **la continuité de la fonction f au point 2**

Exercice 24 : Application du théorème des valeurs intermédiaires

Théorème : Soit $a\ et\ b$ des réels tels que $a < b\ et\ f: [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]\ de\ \mathbb{R}$. Alors f prend toute valeur intermédiaire entre $f(a) et\ f(b)$. Plus précisément :

Pour tout réel k, compris entre $f(a)$ *et* $f(b)$, il existe (au moins) un élément $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$.

Partie A : Point fixe

1) Soit f une fonction continue de $[a; b]$ dans $[a; b]$. Montrer que l'équation $f(x) - x$ admet au moins une solution dans $[a; b]$. (Poser $g(x) = f(x) - x$
2) Soit f une application continue de l'intervalle $[0,1] dans\ [0,1]$

   a) Prouver que la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$ est continue sur l'intervalle $[0,1]$
   b) Prouver qu'il existe un réel x_0 de $[0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$

Application : $f(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$ sur $[0,1]$.

Partie B : Proposée au Concours junior Polytech 2010

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ telle que $\boldsymbol{f(0) = f(1)}$

Montrer que, pour tout entier non nul $\boldsymbol{n}$, il existe un réel x_0 de l'intervalle $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ tel que $\boldsymbol{f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) = f(x_0)}$

Partie C : Une autre application

Soit f une fonction continue sur un segment $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ et soit $\alpha\ et\ \beta$ deux réels strictement positifs. Montrer qu'il existe au moins un réel $\boldsymbol{c} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ tel que l'on ait

$$\boldsymbol{\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(c)}$$

Partie D : Une propriété de la fonction liptschizienne

Soit f une fonction de $[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$ dans $[a, b]$ telle que $\forall\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$: $|\mathbf{f(x) - f(y)}| < \mathbf{k}|\mathbf{x - y}|$ avec $\mathbf{0} < \mathbf{k} < \mathbf{1}$. Montrer que l'équation $\mathbf{f(x)\ =\ x}$ admet alors toujours une et une solution sur $[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$.

Exercice 25 : Equation Fonctionnelle

Soit f une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x : $\boldsymbol{f(2x)+f(x)=0}$

a) Calculer $f(0)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n : $\boldsymbol{f\left(\frac{x}{2^n}\right)=(-1)^n f(x)}$

c) Montrer que $f(x)=0$ pour tout réel

<u>Exercice 26 :</u> Equation Fonctionnelle

On cherche toutes les fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que Pour tout couple (x,y) de réels on ait : $\boldsymbol{f(x+y)=f(x)f(y)}$ $(*)$

1) Montrer que $\boldsymbol{f(0)=1}$
2) Montrer que $\boldsymbol{f(-x)=\frac{1}{f(x)}}$ et $\boldsymbol{f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}}$ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$
3) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $\boldsymbol{f(nx)=[f(x)]^n}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$
4) Montrer que pour tout entier relatif m on a : $\boldsymbol{f(mx)=[f(x)]^m}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$
5) Montrer que pour tout rationnel r on a : $\boldsymbol{f(rx)=[f(x)]^r}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$
6) Montrer que pour tout réel α on a : $\boldsymbol{f(\alpha x)=[f(x)]^\alpha}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$
7) On pose $\boldsymbol{f(1)=k}$; exprimer $f(x)$ en fonction de $x\ et\ k$ pour tout x réel.

<u>Pensée :</u>

« Le propre d'un Grand Homme est de reculer les limites du possible. Même en quittant une modeste place, l'homme de mérite laisse un grand vide, car la sphère de son utilité dépasse toujours les limites de son emploi. De surcroît dans ce monde d'un jour où tout vice est honni, le bien est limité, le mal est infini.»