Axlou Toth pour l'Innovation

NIVEAU : SECONDE S

Généralités sur les fonctions numériques

Exercice 1 :

Dire dans chacun des cas suivants si la courbe représente celle d'une fonction. Expliquer.

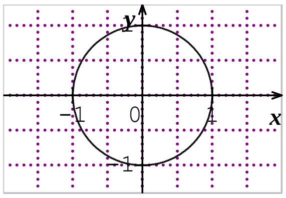


Fig1.

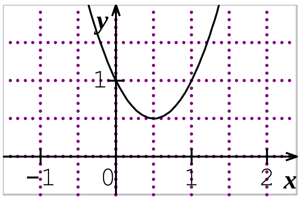


Fig2.

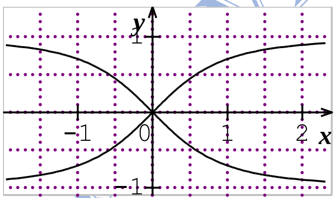
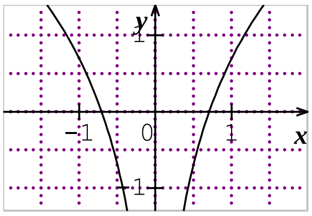
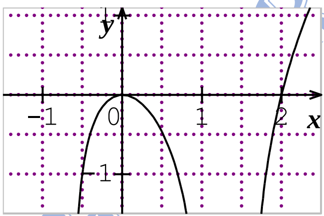
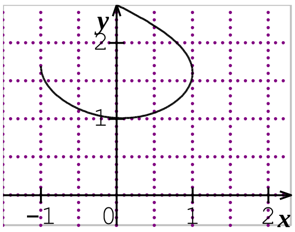


Fig3.

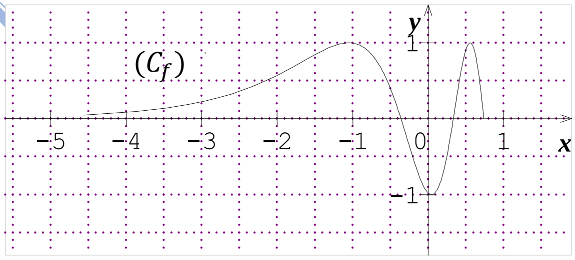






Exercice 2 :

Soit f la fonction numérique représentée dans le plan muni d'un repère par la courbe (C_f) suivante :



1) Quel est le domaine de définition de f ?

2) Quelle est l'image de 0 par la fonction f ?

3) Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f ?

4) Quels sont les extrémums de f sur l'intervalle $[-4; 0]$? Préciser leurs natures.

Exercice 3 :

Dans chaque cas déterminer D_f.

1) $f(x)=\frac{-x^2+3x-1}{x-1}$; 2) $f(x)=\frac{x^2-5x+1}{-2x^2+x+1}$; 3) $f(x)=\frac{x^2-5x+3}{x^3-x^2+x-1}$; 4) $f(x)=(\frac{1-x}{x+3})^4$;

5) $f(x)=\frac{x}{|2x|-4}$; 6) $f(x)=\frac{3-2x}{|x|+2}$; 7) $f(x)=\frac{1}{|x|-x^2}$; 8) $f(x)=2\sqrt{(x-2)^2-x}$;

9) $f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}$; 10) $f(x)=x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$; 11) $f(x)=\sqrt{\frac{x^3-1}{x^2-x-2}}$; 12) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-5x+1}}{\sqrt{-2x^2+x+1}}$.

Exercice 4 :

Dire si chacune des fonctions ci-après est ou non une application de I dans $\mathbb{R}$.

1) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x-3}$ avec $I=[0;+\infty[$; 2) $f(x)=\left|\frac{x}{x-1}\right|$ avec $I=[0;+\infty[$;

3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ avec $I=[0;2]$ 4) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x-3}}$ avec $I=]-\infty;0[$.

Exercice 5 :

Calculer, pour chacun des cas ci-après, $g\circ f(x)$ et $f\circ g(x)$.

1) $f(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=3x+1$; 2) $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$; 3) $f(x)=x^2$ et $g(x)=\sqrt{x}$.

Exercice 6 :

Etudier la parité des fonctions suivantes :

$f(x)=\frac{x^3+1}{x}$; $g(x)=\sqrt{x^2+1}$; $h(x)=\frac{x\sqrt{x}}{x^2-1}$; $i(x)=|x+3|-|x-3|$; $j(x)=\sin x+\cos x$.

Exercice 7 :

Etudier les variations de chacune des fonctions suivantes :

$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto -2x^2+x+1$; $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto 5(x-1)^3+2$; $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto\frac{x+3}{4x+1}$; $k:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto -5\sqrt{3x+1}$.

Exercice 8 :

1) On considère la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) La fonction f est-elle paire ? est-elle impaire ?

c) Montrer que f admet un maximum égal à 0 sur $]-\infty;1[$ et un minimum égal à 4 sur $]1,+\infty[$.

2) On considère la fonction f définie par : $f(x)=x(1-x)$ sur $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que f est majorée par $\frac{1}{4}$ sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que la fonction f admet un maximum en $x_0=\frac{1}{2}$.

c) Démontrer que $f(x)=\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2$; puis étudier ses variations sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 :

1) Le plan est muni du repère (O,I,J).

a) Tracer sur le même graphique les courbes représentatives des fonctions :

$x \longmapsto |x+3|$ et $x \longmapsto 3x-5$.

b) Résoudre graphiquement : $|x+3| = 3x-5$; et $|x+3| < 2x+1$.

c) Résoudre graphiquement :

$|2x-1| = 7$; $|2x-1| = |x+1|$; $|2x-1| < 7$; $|2x-1| > |x+1|$.

2) Le plan est muni du repère (O, I, J).

On donne la fonction $f : [-3;3] \longmapsto \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{x}{E(x)}$; $E(x)$ étant la partie entière de x.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

b) Construire la représentation graphique de f.

c) Déterminer l'ensemble des antécédents de 1.

Exercice 10 :

1) Une fenêtre a la forme d'un rectangle surmonté d'un triangle équilatéral.

Le tour de la fenêtre mesure 10 mètres. L'aire A de cette fenêtre est fonction de sa largeur.

a) Déterminer et représenter point par point la fonction A.

b) Préciser les variations de A en fonction de x.

c) La fonction admet-elle un maximum ? en préciser une valeur approchée.

2) Un voyageur désire louer une voiture pour une semaine. Un particulier lui propose la sienne pour 2 400F la semaine quelle que soit la distance parcourue. Une entreprise de location fonctionne avec deux options.

Option A : 600F de frais fixes et 3F par km parcourue.

Option B : 900F de frais fixes et 2F par km parcourue.

Déterminer, suivant la distance parcourue, la solution la plus avantageuse. (On pourra s'aider d'un graphique.)

Exercice 11 :

1) On considère la courbe d'équation $y = \frac{2x+1}{x-1}$ dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Déterminer l'équation de cette même courbe dans le repère $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, A désignant le point de coordonnées $(1;2)$ dans le repère $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2) On considère la courbe d'équation $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ dans le plan muni du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Déterminer l'équation de cette même courbe dans le repère $(B, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, avec $B(1;1)$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 12 :

Dans chaque cas représenter graphiquement sur $[-4;4]$ la fonction f sachant que :

1) f est paire et pour tout réel x positif on a : $f(x) = 2x-1$.

2) f est impaire et $f(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } 0 \leq x \leq 2 \\ 4 \text{ si } x > 2 \end{cases}$.

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie par :

$f(x) = \frac{2x-7}{4x+2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2) Etudier la parité de f.

3) Déterminer l'intersection de (C_f) avec les axes de coordonnées.

4) Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{x+\frac{1}{2}}$.

5) **a)** En posant $\begin{cases} X = x + \frac{1}{2} \\ Y = y - \frac{1}{2} \end{cases}$, montrer que $y = f(x) \Leftrightarrow Y = -\frac{2}{X}$.

b) En déduire le tracer de (C_f).

c) A l'aide de (C_f) déterminer le tableau de variation de f.

d) Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ où m est un réel.

Exercice 14 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x - 6$.

1) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) \geq -\frac{25}{4}$. Calculer $f\left(-\frac{1}{2}\right)$. En déduire que f admet sur $\mathbb{R}$ un extrémum dont on précisera la valeur et la nature.

2) **a)** Mettre $f(x)$ sous forme canonique.

b) Utiliser la forme canonique et les théorèmes de rangement pour étudier les variations de f sur chacun des intervalles $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ et $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

3) Dresser le tableau de variation de f sur $[-2; 5]$.

4) On désigne par (C_f) la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$du plan. Soit $S\left(-\frac{1}{2}; -\frac{25}{4}\right)$. Donner l'équation de la courbe (C_f) dans le repère $(S,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

En déduire une propriété de la courbe (C_f).

Exercice 15 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). La représentation graphique ci-dessous est celle d'une fonction f d'ensemble de définition $[0; 6]$.

1) Déterminer graphiquement : $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ et $f(6)$.

2) Quelle est l'image de f ?

3) Résoudre graphiquement chacune des équations suivantes :

a) $f(x) = 0$; **b)** $f(x) = -2$; **c)** $f(x) = \frac{3}{2}$; **d)** $f(x) = \frac{2}{3}$; **e)** $f(x) = -6$; **f)** $f(x) = 1$.

4) Résoudre graphiquement chacune des inéquations suivantes :

a) $f(x) > 0$; **b)** $f(x) \leq 0$; **c)** $f(x) \geq -2$; **d)** $f(x) < 2$.

5) Tracer sur le même dessin la droite d'équation : $y = \frac{2}{3}(x-4)$.

a) Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) = \frac{2}{3}(x-4)$.

b) Résoudre graphiquement les inéquations : $f(x) > \frac{2}{3}(x-4)$ et $f(x) \leq \frac{2}{3}(x-4)$.

6) Dresser le tableau de variation de f. La fonction f admet-elle un maximum ?

Si oui, préciser pour quelle valeur ce maximum est atteint.

7) On suppose que f est la restriction à $[0; 6]$ d'une fonction polynôme du second degré.

Déterminer $f(x)$.