Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2019-2020 **Lycée :** Cours d'encadrement Scientifique de Axlou Toth	**SÉRIE D'EXERCICES N°4** **Fonctions Numériques**	**Niveau** : 1S1/C **Professeur** : M. Diallo

Exercice 1 : Domaine de définition

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$;b) $f(x) = \frac{x-1}{|x|-2}$; c) $f(x) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}$; d) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ e) $f(x) = \sqrt{x^2+|x|-2}$;

f) $f(x)\frac{x^2}{|x|+x}$; g) $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{3|x|-1}}$; h) $f(x) = \sqrt{\frac{3+x^2}{2-x^2}}$; i) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-2|x|-3}$; j) $f_m(x) = \frac{1}{x^2-2mx+1}$;

k) $f(x) = \sqrt{|x^2+2x|-3}$; l) $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{mx^2+2x-1}}$; m) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{|x-1|}}{(x-3)(x-2)}$; n) $f(x) = \sqrt{2\sqrt{1-x}-1}$

o) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{E(x)-1}$; p) $f(x) = \frac{3}{E(x)-x}$; q) $f(x) = \sqrt{x-E(x)}$; r) $f(x) = \sqrt{x-E(\sqrt{x})}$; s) $f(x) = \frac{x^2-x}{E\left(x-\frac{1}{x}\right)}$; t) $f(x) = \frac{\sqrt{E(x)-5}}{E(|2x|)-4}$ u) $f(x) = \sqrt{\frac{|1+x|-|4-x|}{x-E(x)}}$ v) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{E\left(\frac{1}{x}\right)-x}$ w) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{(x-1)(x+3)} & si\ x \leq 2 \\ \sqrt{4-x} & si\ x > 2 \end{cases}$ x) $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{x^2-1}, & x < 0 \\ f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-x-2}, & x \geq 0 \end{cases}$ y) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2-x-2}, & x < -1 \\ f(x) = \frac{x+1}{|x|-1}, & x \geq -1 \end{cases}$; z) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x}, & x < 1 \\ \frac{\sqrt{x-1}}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

Exercice 2 : Parité

I) Etudier la parité des fonctions :

a) $f(x) = 3x^4 + x^2$; b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$;c) $f(x) = -2x^2 + 3|x| - 1$; d) $f(x) = \frac{x^3-x}{x^2+|x|}$;

e) $f(x) = \frac{x^2}{5x^2-3}$;f) $f(x) = 8x^3 - 2x$; g) $f(x) = \frac{x}{4x^2-3}$;h) $f(x) = x\sqrt{x^3+3x}$

i) $f(x) = |-x+1| + |x+1|$

II) Dans chacun des cas déterminer la parité de chaque fonction.

$f_1 : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x^2} & , \quad si\ x \neq 0 \\ \alpha & , \quad si\ x = 0 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$; $f_2 : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x-3} & , \quad si\ x \geq 3 \\ -\sqrt{-3-x} & , \quad si\ x < -3 \end{cases}$;

$$f_3 : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} \; si \; x \leq -1 \\ x+1 \; si -1 < x < 2 \cdot \\ \sqrt{x-2} \; si \; x \geq 2 \end{cases}$$

III) Une fonction h définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $3h(-x) + h(x) = 4x^3 + 2x$

Montrer que h est impaire et en déduire $h(x)$.

Exercice 3 :

Soit *f* la fonction définie par *f*(*x*) = |*x* +1| + |*x* - 1|.

1) Montrer que *f*(- *x*) = *f*(*x*) puis conclure sur la parité de *f* . Interpréter graphiquement ce résultat.
2) Ecrire *f*(*x*), suivant les valeurs de *x*, sans le symbole de la valeur absolue.
3) Etudier les variations de *f* sur]-∞ ; - 1], [- 1 ; 1] et [1 ; +∞[puis dresser son tableau de variation.

Exercice 4 :

Soit f une fonction numérique définie sur $[-a;a]$, avec a>0.soit g et h fonctions telles que : $g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ et h(x)= $\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$.

1) Démontrer que g est une fonction paire et h est impaire.
2) Vérifier que f=g+h.
3) Déterminer g et h lorsque :

a) f(x)=x²+x+1 ;b) $f(x) = \frac{2x=3}{x=2}$; c)f(x) $\frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1}$

Exercice 5 : Périodicité

1. On considère la fonction numérique f définie de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x :
$$f(x+2) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$
   a) Calculer $f(x+4)$, $f(x+6)$ et $f(x+8)$ en fonction de $f(x)$
   b) En déduire que f est périodique et préciser sa période
2. Soit f une application définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que qu'il existe un réel non nul k tel que pour tout réel x : $f(x-k) = -f(x+k)$
   Prouver que f est périodique et préciser sa période T.
3. Soit f une fonction qui est définie sur $\mathbb{R}$ et qui possède la propriété suivante :
$$\ll \exists \text{ a} > 0 \text{ tel que } f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2} \gg$$

Montrer que f est périodique et préciser sa période.

Exercice 6 :

I/ Soit f, g, h, k les fonctions numériques suivantes :

$f : x \mapsto |x|; g : \mapsto \left(\sqrt{x}\right)^2; h : x \mapsto \sqrt{x^2}; k : x \mapsto x$

1) Dire celles qui sont égales
2) La fonction g est elle-une restriction de k ? De f ?
3) La fonction f est-elle un prolongement de k ?

II) On donne les fonctions f et g de IR vers IR définies par : $f(x) = \frac{|x^2-2x-3|}{x+1}$ et g(x) = x-3

Sur quel intervalle les restrictions de f et g sont-elles égales ? Sont – elles opposées ?

Exercice 7 :

Soit $f: \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}\backslash\{3\}$ et $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$

$x \mapsto \frac{3x+5}{x-2}$

1) Déterminer $Dfog$ et $Dgof$
2) Déterminer $fog(x)$ et $gof(x)$
3) Déterminer les ensembles de définition des fonctions fog et gof dans les cas suivants
   a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = x^2 - x + 2$
   b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ et $g(x) = x^2 + x$
4) Dans les 3 cas suivants, Calculer $g \circ f(x)$ puis $f \circ g(x)$
   a) f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = -5x + 4$
   b) $f(x) = \sqrt{x-6} + 3$ sur $[6; +\infty[$ et $g(x) = 3x - 6$ sur $\mathbb{R}$
   c) $f(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ et $g(x) = -x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 : Minimum et maximum

A) On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+2}$
1) Montrer que f admet une valeur maximale au point -3.
2) Montrer que f admet une valeur minimale au point -1.

B) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2+4}}$.
   1) a)Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.
      b) Montrer que f est paire. Interpréter ce résultat graphique.
   2) a) Donner les images des réels $0; \sqrt{5}; -1; et\ 2\sqrt{3}$ par f.
      b) Trouver le nombre d'antécédent(s) de 1 par f.
   3) Montrer que f est minorée par 0 et majorée par 1.
   4) Montrer que f admet un maximum absolu en 0 que l'on précisera.

Exercice 9 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

1) Montrer que f est impaire. Interpréter ce résultat graphiquement.
2) a) Montrer que pour tout réel x, on a : $2|x| \leq x^2 + 1$.
   b) En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
3) Soient a et b deux réels distincts.
   a) Montrer que : $f(a) - f(b) = \frac{2(a-b)(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)}$
   b) En déduire les variations de f sur $[0; 1]$ et $[1, +\infty[$
4) Dresser le tableau de variations de f.
5) Déterminer les extremums de f.

Déterminer l'image de l'intervalle $[-1,1]$ par f.

Exercice 10 :

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, dans chacun des cas suivants étudiez la monotonie de fog et la monotonie de gof.

a) f croissante et g croissante sur I.
b) f décroissante et g croissante sur I.

c) f décroissante et g décroissante sur I.

Exercice 11 :

Définition : Pour tout réel $\boldsymbol{x}$ on appelle partie entiere de $\boldsymbol{x}$ le nombre entier relatif noté $\boldsymbol{E(x)}$ défini par $\mathbf{E(x) \leq x < E(x) + 1}$

Exemple : E(1,2) = 1 car $1 \leq 1{,}2 < 2$ et E(-2,4) = -3 car $-3 \leq -2{,}4 < -2$.

Ainsi $\boldsymbol{E(x) = n}$ siginifie que $\boldsymbol{x \epsilon [n; n+1[}$, ou encore $\boldsymbol{n \leq x \leq n+1.}$

A. Etude de la fonction $E(x)$

1) Donner E(2,3) ; E(-4.1) ; E(5) , E(0,1)
2) Quels sont les réels x tels que a) $\boldsymbol{E(x)} = 3$? b) $\boldsymbol{E(x)} = -2$ c) $\boldsymbol{E(x)} = 0$?
3) Etudier la fonction $\boldsymbol{E(x)}$ et tracer la courbe représentative de $\boldsymbol{E(x)}$ restreinte à l'intervalle $[-5; 4]$.
4) Soit $\boldsymbol{x}$ un réel tel que $\boldsymbol{E(x)} = 4$. Montrer qu'alors $\boldsymbol{E(x+3)} = 7$.
   Montrer que, plus généralement, pour tout $n \in Z$, $E(x+n) = E(x) + n$
5) Montrer que si $\forall\, x \,\epsilon \mathbb{Z}$,$E(-x) = -E(x)$ puis si $x \notin \mathbb{Z}$ alors $E(-x) = -E(x) - 1$.

B. Avec la partie entière

4) Soit $\boldsymbol{f : IR \to IR}$

$$\boldsymbol{x \mapsto x - E\left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

a) Calculer $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$,$f\left(-\frac{1}{2}\right)$
b) Montrer que pour tout $n \in Z$, $f(n) = 0$
c) En utilisant la question 4. Démontrer que $-\frac{1}{2} \leq f(x) < \frac{1}{2}$.
d) Montrer que $\forall\, x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$,$f(x) = x$.
e) Montrer que f *est* périodique de période 1
f) Tracer Cf sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$.
g) En déduire la représentation graphique de Cf sur $[-5; 5[$.

C. La partie décimale

Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathbf{d(x)} = \boldsymbol{x - E(x)}$.

1) Calculer les images par d des réels : $5{,}2; \frac{3}{2}$; $8; -5; -6{,}3$.
2) Donner au moins quatre réels différents, et pas tous de mémé signe, qui vérifient : $\mathrm{d(x)} = 0{,}4$.
3) Démontrer que *pour tout* $\boldsymbol{x \in IR}$, $\boldsymbol{0 \leq d(x) < 1}$.
4) Montrer que d est périodique.
5) Tracer la représentation graphique de la restriction de à $[0; 1[$ et en déduire alors courbe représentative de d.
6) Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ $par\ g(x) = \frac{d(x)}{\sqrt{x}}$.
   a) En déduire une majoration de $g(x)$ sur $]0; 1[$.
   b) Montrer alors que g est bornée sur $]0; +\infty[$.

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=(-1)^{E(x)}[x-E(x)]^2$:

a) Montrer que f est périodique de période 2.
b) Etudier f sur l'intervalle $[0;2]$ puis tracer sa courbe représentative.

Exercice 13 :

On considère la fonction $g: x \to d(x,\mathbb{Z})$, où $d(x,\mathbb{Z})$ représente la distance du réel la distance du réel x à l'entier relatif le plus proche

a) Montrer que $g(x) = \min\ (\ x - E(x); E(x) - x + 1\ )$ où $\min\ (a;b)$ désigne le plus petit des entiers a et b
b) Calculer $d\left(\frac{3}{4},\mathbb{Z}\right), d\left(\frac{8}{3},\mathbb{Z}\right)\ et\ d(\sqrt{2},\mathbb{Z})$.

Exercice 14 : Quelques propriétés de $E(x)$.

A. On désigne par $E(x)$ la partie entière de x.

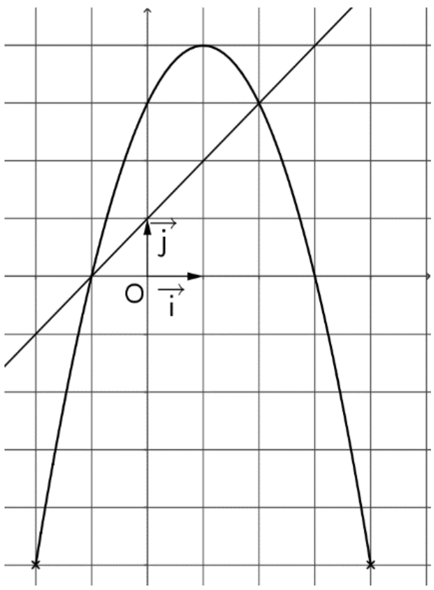
1) Montrer que, pour tout x : $2E(x) \leq E(2x) \leq 1 + 2E(x)$.
2) Montrer que pour tout x réel : $E\left[\frac{E(2x)}{2}\right] = E(x)$.

B. On cherche à démontrer que : $\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$

Pour cela, on pose : $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) - E(nx)$

1) Montrer que f est $\frac{1}{n} - périodique$.
2) Prouver que $\forall\ x \in \left[0;\frac{1}{n}\right[, f(x) = 0$ puis conclure .

Exercice 15 :



Dans le repère ci-contre sont représentées la courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2, 4]$ et la droite (D) : y = x+1.

1. Déterminer graphiquement les images de -1 ; 0 ; et de 1 par f.
2. Résoudre graphiquement

a. $f(x) = 3$, b. $f(x) = 4$, c. $f(x) = -7$, d. $f(x) > 0$, e. $f(x) \leq 0$.

3. Résoudre graphiquement

a. $f(x) - x - 1 = 0$, b. $f(x) - 1 \geq x$.

Exercice 16 :

Soit f la fonction définie pour tout réel x tel que $|f(x)| \neq \frac{1}{3}$ par : $f(x+1) = \dfrac{f(x)-1}{3f(x)+1}$.

1) Peut-il exister un réel x tel que $f(x+1) = f(x)$? Justifier.
2) Calculer $f(x+2)$ en fonction de $f(x)$.
3) Montrer que f est périodique de période 3.
4) On suppose dans cette question que $f(0) = 1$.
   a) Calculer $f(1)$; $f(2)$ et $f(3)$.
   b) On suppose que : $\begin{cases} si\ 0 \leq x \leq 2;\ f(x) = ax + b \\ si\ 2 \leq x \leq 3;\ f(x) = a'[(x-3)^2 + \beta] \end{cases}$.
      i) Déterminer a et b en utilisant $f(0)$ et $f(1)$.
      ii) Déterminer a' et β à l'aide de $f(2)$ et $f(3)$.
      iii) Résoudre dans $[0;3]$ l'équation $|f(x)| = \frac{1}{3}$, suivant les valeurs de x.
      iv) En déduire l'ensemble des valeurs de $[0;3]$ ayant une image par f.

Tracer la courbe de f sur l'intervalle $[0; 3]$.

Exercice 17 :

Soit f, g et h trois fonctions définies par :

$f(x) = x^2 - 4x + 3$; $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = gof(x)$.

1) Montrer que la droite d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de (C_h).
2) Etudier les variations de f et g puis en déduire celles de h.
3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C_h) avec les axes de coordonnées.
4) Etudier la position relative de (C_h) par rapport à la droite $(D_1) : y = x - 2$, d'une part et d'autre part, par rapport à la droite $(D_2) : y = -x + 2$.
5) Tracer dans le même repère orthonormé les courbes (C_f) et (C_g).
6) En déduire (C_h) puis celle de la fonction $\mapsto f(|x|)$.

Exercice 18 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1$, si $x \geq 0$et $f(x) = 0$, si $x < 0$.

On pose : g(x) = 2f(x)–f(x–1) et h(x) = g(x–1)+2g(x–2) +…+ 2009g(x– 2009).

Calculer $h(\sqrt{2009})$.

Exercice 19 :

Soit $f$la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x-7}{4x+2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2) Etudier la parité de f.

3) Déterminer l'intersection de (C_f) avec les axes de coordonnées.

4) Déterminer les réels a et b tels que : $f(x) = a + \frac{b}{x+\frac{1}{2}}$.

5) Montrer que le point $I(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de (C_f).

6) a) En posant$\begin{cases} X = x + \frac{1}{2} \\ Y = y - \frac{1}{2} \end{cases}$ montrer que $y = f(x) \Leftrightarrow Y = -\frac{2}{X}$.

b) En déduire le tracer de (C_f).

c) A l'aide de (C_f) déterminer le tableau de variation de f.

d) Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ où $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 20 :

On définit pour chaque couple de réels $(a; b)$ la fonction f par $f(x) = a - \sqrt{x + b}$.

Deux nombres réels distinctes u et v sont dit échangeables s'il existe au moins un couple de réels $(a; b)$ tel que la fonction f vérifie à la fois $f(u) = v$ et $f(v) = u$.

1) Montrer que 2 et 3 sont échangeables.
2) Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?
3) A quelle condition deux entiers u et v sont-ils échangeables ?

Exercice 21 :

Soit f une fonction définie sur $[0; 1]$ à valeurs dans $[0; 1]$ telle que pour tous réels x et y de $[0; 1]$; $|\varphi(x) - \varphi(y)| \geq |x - y|$

1) Montrer que les fonctions u et v définies sur $[0;1]$ par $u(x) = x \ et \ v(x) = 1 - x$ sont de telles fonctions
2) Montrer que l'on a $E(\varphi) = \begin{cases} \varphi(0) = 0 \quad et \quad \varphi(1) = 1 \\ \quad ou\ bien \\ \varphi(0) = 1 \quad et \quad \varphi(1) = 0 \end{cases}$
3) On suppose que $\varphi(0) = 0 \ et\ donc\ \varphi(1) = 1$
   a) Démontrer que pour tout x de $[0;1]$ $f(x) \geq x$
   b) Exploiter l'inégalité $|\varphi(x) - 1| \geq |x - 1|$ pour établir que pour tout x de $[0;1]$ $\varphi(x) = x$.
   c) .Examiner le cas $\varphi(0) = 1$.
4) a) Démontrer que chacune des fonctions f, g telles que $f(x) = \frac{x^2}{2}$ et $g(x) = \frac{1}{1+x}$ est définie sur I, et à valeurs dans I

   b) Démontrer que f et g sont dans E(φ) :
   c) Trouver deux ensembles I et J de R tels que f soit bijective I dans J.

<u>Pensée :</u>

« Soyez un élément de qualité. Certaines personnes ne sont pas habituées à un environnement où l'on attend l'Excellence » Steve Jobs