Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2019-2020 **Lycée :** Cours d'Excellence d'Encadrement Scientifique de Axlou Toth	**Série d'Exercices** **Equations -Inéquations et Systèmes**	**Niveau** : 1S1/C **Professeur** : M. Diallo

Exercice 1 :

Le but de cet exercice est d'établir l'égalité suivante : $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1$

Calculer $\alpha=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $\beta=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

1) Calculer $\alpha^3+\beta^3$ et $\alpha\beta$
2) Démontrer que $\forall$ A et B réels on a :
$$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2) \text{ Puis et } A^3+B^3=(A+B)[(A+B)^2-3AB]$$
3) En déduire que le réel $\alpha+\beta$ est solution de l'équation $x^3+3x-4=0$
4) Résoudre l'équation $x^3+3x-4=0$ puis conclure.

Exercice 2 :

Soit l'équation $(1)\colon y^2-(m+1)y+m+3=0$ où m est un paramètre réel.

1) Discuter suivant les valeurs de m l'existence et le signe des solutions de (1)

On désigne par a et b les solutions de l'équations (1) lorsqu'elles existent.

2) On considère l'équation $(2)\colon (a+b)x^2-2x-ab=0.$

Sans calculer a et b, déterminer les valeurs de m pour lesquelles (2) admet deux solutions de signes contraires.

3) Déterminer une équation du second degré dont les solutions sont
$$X_1=\frac{1}{a} \text{ et } X_2=\frac{1}{b}$$
4) Déterminer une relation indépendante de m entre les racines a et b.

Exercice 3 :

On considère le polynôme H défini par : $H(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ où a,b,c et d sont des réels.

On considère la propriété (P): pour tout réel x, on a $H(x)=H(2-x)$

1) Montrer que H vérifie la propriété (P) si et seulement si $a=-4$ et $c=8-2b$.
2) On suppose alors que H vérifie (P). Montrer que H peut s'écrire sous la forme : $H(x)=(x^2-2x)^2+(b-4)(x^2-2x)+d$ avec b,d des réels.

Application :
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4-4x^3+8x^2-8x-5=0.$

Exercice 4 :

A) Les racines x_1 et x_2 d'une équation du second degré vérifiant les relations suivantes

- $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 0$
- $mx_1x_2 - (x_1 + x_2) = 2m + 1$ où m est un paramètre réel

1) Former cette équation
2) Déterminer m pour que l'équation admet deux racines positives
3) On considère un triangle dont les côtés de l'angle droit ont pour mesures respectives x_1 et x_2 Déterminer m pour que l'hypoténuse de ce triangle soit égale à $\sqrt{2}$.

B) Soit l'équation(E): $x^2 - 2mx + m^2 + m - 2 = 0$

1) Etudier l'existence et le signe des solutions de l'équations (E).
2) a) Former une équation du second degré d'inconnue étant les solutions de (E). $X_1 = 4x_1 - 3m$ et $X_2 = 4x_2 - 3m, x_1 et\ x_2$ étant les solutions des racines qui vérifient $4x - 3 > 0$?

Exercice 5 :

On Considère le polynôme de paramètre réel m défini par : $f_m(x) = (2m-1)x^2 + (3m+4)x + m - 4$

1) Discuter suivant les valeurs de m l'existence, le nombre et le signe des solutions de l'équation $f_m(x) = 0$.
2) Déterminer m de sorte que 1 soit une racine puis trouver l'autre racine.
3) Pour quelles valeurs de m les racines x_1 *et* x_2 vérifient –elles ?

   a) $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} = 17$, b) $|x_1 - x_2| = 5$

4) Peut-on trouver des valeurs de m pour que l'équation ait deux racines

   a) opposées. b) inverses c) $-3 < x_1 < -1 < x_2 < 0$

5) Discuter suivant les valeurs de m les solutions de l'inéquation $f_m(x) < 0$.

Exercice 6 :

A) On considère l'équation de degré n. $(A_0 \neq 0)$

$$f(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0,$$

Dont on désigne les racines, distinctes ou confondues, par $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Montrer que l'équation $F(X) = 0$, obtenue en faisant le changement d'inconnue $x^2 = X$ dans l'équation $f(x). f(-x) = 0$, n'est autre que l'équation qui admet comme racines les carrés des racines de l'équation $f(x) = 0$.

Application :

Former l'équation en X qui admet comme racines les carrés de l'équation

$$f(x) = (m-1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0.$$

B) On note α et β les solutions de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$)

On pose : $S_n = \alpha^n + \beta^n$.

Démontrer que : $aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0$.

Exercice 7 :

Résoudre dans ℝ les équations irrationnelles suivantes :

a) $\sqrt{x^2 + x} = 2x - 1$ b) $\sqrt{3x^2 - 11x + 21} = 2x - 3$ c) $2x + 1 + \sqrt{-7x - 5} = 0$

d) $\sqrt{6x+2}-\sqrt{3x}=\sqrt{9x-2}$ e) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}$ f) $\sqrt{x^2-x-2}=|3x-4|$

g) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}=1$ i) $x+\sqrt{-x+3}-2=0$ j) $1+\sqrt{3x^2-2x-1}=x$

k) $\sqrt{5x+9}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{x-1}$

Exercice 8 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations rationnelles suivantes :

a) $\sqrt{2x+3}<3$ b) $\sqrt{4x+1}<2x+1$ c) $\sqrt{5x^2+19x-4}>\sqrt{x(x+1)}$

d) $\sqrt{x^2-x-1}<x+5$ e) $\sqrt{2x^2-x}<2x-3$ f) $\sqrt{3(x^2-1)}>2x-1$

g) $\sqrt{x^2+6x+6}\geq|2x+1|$ h) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}<\sqrt{6x+7}$ i) $\sqrt{-5x^2+x+6}\geq m$

j) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}<\sqrt{6x-1}$; $\sqrt{2x-3}\leq\sqrt{|x|-|2x-1|}$

Exercice 9 :

Soit l'équation $2x^2+3x-3+\sqrt{2x^2+3x-9}=18$ (1)

a) Définir l'équation puis montrer qu'en posant $y=\sqrt{2x^2+3x-9}$ l'équation (1) devient $Y^2+Y-12=0$ (2)
b) Résoudre alors l'équation (2) puis en déduire les solutions de l'équation (1).

Application :

Résoudre de même les équations suivantes :

a) $x^2-x+\sqrt{x^2-x+3}=9$
b) $x^2-3x+\sqrt{x^2-3x+11}=1$

Exercice 10 :

On donne $g_m(x)=(m-1)x^2-3(m-1)x+2m-\frac{9}{4}$ où m est un réel

1) Discuter suivant les valeurs de m l'existence des solutions de l'équation $g_m(x)=0$
2) a) En déduire suivant les valeurs de m le signe de $(m-1)g_m\left(\frac{3}{2}\right)$

   b) En déduire de la position de $\frac{3}{2}$ par rapport aux solutions de l'équation $g_m(x)=0$ lorsqu'elles existent
3) Résoudre l'inéquation $m(x^2-3x+2)\geq 0$ suivant les valeurs de m
4) En utilisant les résultats des questions précédentes, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt{m(x-1)(x-2)}=x-\frac{3}{2}$$

Exercice 11 :

Partie A :

Soit le trinôme $P(x)=(2m-1)x^2-2mx+1$

1) Déterminer des valeurs de m pour lesquelles P(x) admet deux racines distinctes puis une racine double
2) Dans ce cas ou P(x) admet deux racines distinctes, déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles les deux racines sont positives, puis les deux racines sont de signes contraints.

Partie B :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations irrationnelles suivantes

1) $\sqrt{m+x} = \sqrt{x+1} + 1$ $m \in \mathbb{R}$
2) $\sqrt{x^2 - 2x - m} = 2x - 1$
3) $\sqrt{4x^2 - 2mx - m^2} = 2x + m$
4) $5\sqrt{|x| - x} = m - 2x.$
5) $\sqrt{1 - m|x|} = x + m$
6) $\frac{m+1}{m-1}x^2 - 2x - 1 < 0$
7) $\sqrt{4x^2 + mx + 1} \leq 2x - 3$
8) $x^4 - 2x^3 + mx^2 - 2x + 1 = 0$
9) $\frac{mx^2 - 7mx + 6}{m^2x^2 - 6mx - 5} \leq 0$
10) $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = m$

Exercice 12 :

A) Soit $P(x) = (2m-1)x^2 - 2(m+4)x + 5m + 2$

Comparer $\alpha = -1$ et $\beta = 1$ aux racines de $P(x)$.

Soit P le polynôme défini par :

B) Soit $P(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 + 1$

Déterminer les valeurs du nombre réel m pour que P ait deux racines α et β telles que :

a) $\alpha^2 + \beta^2 = 29$
b) $|\alpha - \beta| = 1$

Dans chacun des cas, calculer α et β.

Exercice 13 :

Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ -x + 4y - 2z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = -5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x + 2y + 5z = 4 \\ x + y + 2z = 6 \\ 2x + 3y + 7z = 10 \end{cases}$

Exercice 14 :

1) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x(y+z) + 1 = 3x \\ y(z+x) + 1 = 3y \\ z(x+y) + 1 = 3z \end{cases}$$

2) Les nombres a, b et c n'étant pas nuls, on considère le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = a & (1) \\ x^2 + y^2 = b^2 & (2) \\ x^3 + y^3 = c^3 & (3) \end{cases}$$

a) Quelle condition doit-il exister entre les nombres a, b et c pour que le système soit compatible ?
b) Cette condition étant satisfaite, résoudre le système.

Exercice 15 :
On se propose de résoudre le système

$$(S)\ \begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=0 \\ x^3+y^3+z^3=0 \end{cases}$$

1) Montrer que (S) est équivalent au système (S')

$$(S')\begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+yz+zx=-3 \\ xyz=6 \end{cases}$$

2) En déduire que x, y et z sont les solutions de l'équation $X^3-3X-2=0$ [E]
3) Résoudre alors $[E]$ puis en déduire toutes les solutions de (S').

Indication : Donner les formes factorisée et développée d'un polynôme de degré n qui admet n racines.

Exercice 17 : Théorème de Kakeya-enestrom

On note (E) l'équation : $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_n = 0$, avec $a_0 \neq 0 \quad et \quad a_n \neq 0$.

On désigne par M le plus grand des nombres $\left|\frac{a_1}{a_0}\right|; \left|\frac{a_2}{a_0}\right|; \dots; \left|\frac{a_n}{a_0}\right|$

Le but du problème est de démontrer que toutes les solutions de (E) si elles existent, sont dans l'intervalle $]-1-M; 1+M[$.

1) Démontez que (E) a les mêmes solutions que l'équation : $\frac{a_1}{a_0x} + \frac{a_2}{a_0x^2} + \dots + \frac{a_n}{a_0x^n} = -1\ (E')$
2) g est la fonction définie sur IR* par : $g(x) = \frac{a_1}{a_0x} + \frac{a_2}{a_0x^2} + \dots + \frac{a_n}{a_0x^n}$
   a) Démontrer que $|g(x)| \leq M\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|^2} + \dots + \frac{1}{|x|^n}\right)$
   b) Montrer que pour tout $|x| \geq 1+M \quad |g(x)| \leq M\left(\frac{1}{1+M} + \frac{1}{(1+M)^2} + \dots + \frac{1}{(1+M)^n}\right)$

En déduire que $\forall\ |x| \geq 1+M\ on\ a |g(x)| < 1$

On pourra utiliser la relation $\forall\ q \neq 1, n \in \mathbb{N}^*, q + q^2 + \dots + q^n = q\,\frac{(1-q^n)}{1-q}$

c) Démontrer que si $|x| \geq 1+M$ alors x n'est pas solution de (E).

Déduisez-en que les solutions de (E) sont dans l'intervalle $]-1-M;1+M[$.

3) **Application** :

a) Montrer que l'équation $8x^5+4x^4-3x^2+5x-2=0$, a au moins une solution.

b) Montrer que toutes ses solutions sont dans $]-1.625;1.625[$.

Pensée :

« En réalité, il n'existe pas d'obstacles insurmontables pour celui qui veut réellement y parvenir. » Cheikh Ahmadou Bamba