Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2019-2020 Lycée : Cours d'encadrement Scientifique de Axlou Toth	SÉRIE D'EXERCICES N°3 Equations-Inéquations et Systèmes	Niveau : 1S1/C Professeur : M. Diallo

Exercice 1 :

Soit l'équation $(1): y^2-(m+1)y+m+3=0$ où m est un paramètre réel.

1) Discuter suivant les valeurs de m l'existence et le signe des solutions de (1)

On désigne par a et b les solutions de l'équations (1) lorsqu'elles existent.

2) On considère l'équation $(2): (a+b)x^2-2x-ab=0$.

Sans calculer a et b, déterminer les valeurs de m pour lesquelles (2) admet deux solutions de signes contraires.

3) Déterminer une équation du second degré dont les solutions sont

$$X_1=\frac{1}{a} \text{ et } X_2=\frac{1}{b}$$

4) Déterminer une relation indépendante de m entre les racines a et b.

Exercice 2 :

On considère le polynôme H défini par : $H(x)= x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ où a, b, c et d sont des réels.

On considère la propriété (P): pour tout réel x, on a $H(x)=H(2-x)$

1) Montrer que H vérifie la propriété (P) si et seulement si $a=-4$ et $c=8-2b$.
2) On suppose alors que H vérifie (P). Montrer que H peut s'écrire sous la forme : $H(x)=(x^2-2x)^2+(b-4)(x^2-2x)+d$ avec b, d des réels.

Application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4-4x^3+8x^2-8x-5=0$.

Exercice 3 :

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation $(E): x^4-2x^2+6x-\frac{3}{4}=0$

On pose $P(x)=x^4-2x^2+6x-\frac{5}{4}$. L'idée est d'écrire P(x) sous la forme

$P(x)=Q(x)+R(x)$ avec $Q(x)=(x^2+m)^2$ et $R(x)=ax^2+bx+c=a(x+x_0)$ où m, a, b, c et x_0 sont des réels à déterminer.

1) a) Montrer que $P(x)=Q(x)+R(x)$ si et seulement si

$$a=-2-2m;\ b=6 \text{ et } c=-\frac{5}{4}-m^2$$

b) Ecrire alors R(x)en fonction de m.

2) a) Pour quelles valeurs de m, R est—il du second degré ?
b) Calculer dans ce cas son discriminant réduit Δ en fonction de m.
c) Montrer que $\Delta = 0$ si et seulement si $m = 1$ puis établir dans ce cas que
$R(x) = -4\left(x - \frac{3}{4}\right)^2$ et que $Q(x) = (x^2+1)^2$.
d) En déduire une factorisation de P(x) puis une résolution de l'équation (E).

Exercice 4 : Règle $af(\alpha)$; position d'un nombre par rapport aux zéros d'un trinôme du second degré.

1) Soit $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ un trinôme du second degré, **Δ** son discriminant, x' et $x"$ les zéros de $f(x)$ lorsque **Δ** est positif (on supposera $x' < x"$).
   a) Soit α un réel. Précisez le signe de $f(\alpha)$ suivant le signe de **Δ** et, éventuellement, la position de α par rapport à x' et $x"$.
   b) Etudiez le signe du produit $af(\alpha)$.
   c) Déduisez de ce qui précède les deux conséquences suivantes, dont la réunion constitue la règle $af(\alpha)$:
   $\boldsymbol{\Delta} > \mathbf{0}$ et $\alpha \in]x' ; x"[\Leftrightarrow af(\alpha) < 0$
   $\boldsymbol{\Delta} > 0$ et $\alpha \notin [x'; x"] \Rightarrow af(\alpha) > 0$

NB : Lorsque l'on a : $\boldsymbol{\Delta} > \mathbf{0}$,étudie le signe de $\frac{x'+x"}{2} - 1$ pour savoir si l'on a : $1 < x' < x"$ où $< x' < x" < 1$.

2) **Application 1 :**
Soit le polynôme : $f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-3)x + m + 4$ où m désigne un réel donné.
   a) Précisez l'ensemble E des valeurs m pour lesquelles $f(x)$ à deux zéros distincts, x' et $x"$ (on suppose $x' < x"$).
   b) Positionnez 1 par rapport aux racines x' et $x"$.
3) **Application 2 :**
Soit $P(x) = (2m-1)x^2 - 2(m+4)x + 5m + 2$

Comparer $\alpha = -1$ et $\beta = 1$ aux racines de P(x).

Exercice 5 :

1) Soit l'équation $(E) : (m+1)x^2 + 2(m-3)x + m + 3 = 0\ \ (m \neq -1)$
   a) Discuter suivant les valeurs de m le nombre de solutions l'équation (E).
   b) Dans le cas où (E) admet deux solutions distinctes, déterminer leurs signes selon les valeurs de m.
   c) Donner les cas où les racines distinctes existent et sont notées x_1 et x_2, trouver une relation indépendante de m qui les lie. Déduire de cette relation les solutions de x_1 et x_2 telles que $x_1 = 2\,x_2$
   d) Déterminer m pour que si on suppose $x_1 < x_2$, on ait $x_1 < 1 < x_2$
2) Résoudre suivant les valeurs de $m\ \ (m \neq -1)$
$(E) : (m+1)x^2 + 2(m-3)x + m + 3 > 0$
3) Former l'équation du second degré dont les solutions sont
$X = 2x_1 - 1$ et $Y = 2x_2 - 1$

Exercice 6 :

On considère l'équation d'inconnue x :

$(m-2)x^2 + 2(m-4)x + (m-4)(m+2) = 0$

1) Etudier l'existence et le signe des racines de cette équation

2)

a) Déterminer une relation indépendante de m liant les racines x' et x'' de cette équation.

b) En déduire les valeurs des racines doubles.

3) Calculer en fonction de m l'expression :

$$y = \frac{1}{1+x'} + \frac{1}{1+x''}$$

Exercice 7 :

A) Les racines x_1 et x_2 d'une équation du second degré vérifiant les relations suivantes

- $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 0$
- $mx_1x_2 - (x_1 + x_2) = 2m + 1$ où m est un paramètre réel

1) Former cette équation
2) Déterminer m pour que l'équation admet deux racines positives
3) On considère un triangle dont les côtés de l'angle droit ont pour mesures respectives x_1 et x_2

   Déterminer m pour que l'hypoténuse de ce triangle soit égale à $\sqrt{2}$.

B) Soit l'équation(E): $x^2 - 2mx + m^2 + m - 2 = 0$

1) Etudier l'existence et le signe des solutions de l'équations (E).
2) a) Former une équation du second degré d'inconnue étant les solutions $X_1 = 4x_1 - 3m$ et $X_2 = 4x_2 - 3m$

   b)Determiner m pour que $x_1 et\ x_2$ étant les solutions des racines qui vérifient $4x - 3 > 0$?

Exercice 8 :

Soit $P(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 + 1$

Déterminer les valeurs du nombre réel m pour que P ait deux racines α et β telles que :

a) $\alpha^2 + \beta^2 = 29$

b) $|\alpha - \beta| = 1$

Dans chacun des cas, calculer α et β.

Exercice 9 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations irrationnelles suivantes :

a) $\sqrt{x^2 + x} = 2x - 1$ b) $\sqrt{3x^2 - 11x + 21} = 2x - 3$ c) $2x + 1 + \sqrt{-7x - 5} = 0$

d) $\sqrt{6x+2} - \sqrt{3x} = \sqrt{9x-2}$ e) $\sqrt{x+2} + \sqrt{3x-2}$ f) $\sqrt{x^2 - x - 2} = |3x - 4|$

g) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$ i) $x + \sqrt{-x+3} - 2 = 0$ j) $1+\sqrt{3x^2 - 2x - 1} = x$

$\sqrt{2x^2 - 7x + 4} = \sqrt{-x^2 - 3x + 4}$; $\sqrt{1 - 2x^2} = \sqrt{x-4}$; $\sqrt{x+2} = \sqrt{2x-5}$

k) $\sqrt{5x+9} + \sqrt{3x+1} = \sqrt{x-1}$ L) $x + a^3 = \sqrt[3]{a-x}$ I) $\frac{x+2}{\sqrt{x}-1} - \sqrt{x} = 4$

m) $\sqrt{x^2-10x+9}=\sqrt{x+2+2\sqrt{x^2-10x+9}}$ (on étudiera le **domaine de définition**)

Exercice 10 :

Soit l'équation $2x^2+3x-3+\sqrt{2x^2+3x-9}=18$ (1)

a) Définir l'équation puis montrer qu'en posant $y=\sqrt{2x^2+3x-9}$ l'équation (1) devient $Y^2+Y-12=0$ (2)
b) Résoudre alors l'équation (2) puis en déduire les solutions de l'équation (1).

Application :

Résoudre de même les équations suivantes :

a) $x^2-x+\sqrt{x^2-x+3}=9$
b) $x^2-3x+\sqrt{x^2-3x+11}=1$.

Exercice 11 :

1. Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

$(2x^2-5x+7)^2-(x^2-12x+7)^2>0; -x^4+3x^2+4\leq 0$

$\begin{cases} x^4-5x^2+4<0 \\ x^4-8x^2-9<0 \end{cases}$; $\frac{x^4-5x^2+4}{x^4-2x^2-3}>0$; $-\frac{1}{2}\leq\frac{x-1}{x^2-x+14}\leq 1$;

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations rationnelles suivantes :

a) $\sqrt{2x+3}<3$ b) $\sqrt{4x+1}<2x+1$ c) $\sqrt{5x^2+19x-4}>\sqrt{x(x+1)}$

d) $\sqrt{x^2-x-1}<x+5$ e) $\sqrt{2x^2-x}<2x-3$ f) $\sqrt{3(x^2-1)}>2x-1$

g) $\sqrt{x^2+5}\geq\sqrt{-2x+1}$; h) $\sqrt{x^2+5x+4}<\sqrt{2x+9}$; i) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{5+x}<\sqrt{x-1}$

k) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}>\sqrt{5+4x}$; j) $\sqrt{x^2+6x+6}\geq|2x+1|$ L) $\sqrt{-5x^2+x+6}\geq m$

m) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}<\sqrt{6x+7}$ n) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}<\sqrt{6x-1}$;

o) $\sqrt{2x-3}\leq\sqrt{|x|-|2x-1|}$

Exercice 12 :

Dans chacun des cas suivants, discuter suivant les valeurs de m, la résolution de l'inéquation (I) :

$(m-1)x^2-2mx+m+2>0$; $mx^2-(5m+1)x+3(2m+1)>0$

$(m+2)x^2-(m+4)x+m+1<0$; $(m+3)x^2-(3m-1)x+m+1>0$

$\frac{m+1}{m-1}x^2-2x-1<0$

Exercice 13 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations irrationnelles suivantes

1) $\sqrt{m+x}=\sqrt{x+1}+1$ $m\in\mathbb{R}$
2) $\sqrt{x^2-2x-m}=2x-1$
3) $5\sqrt{|x|-x}=m-2x$.
4) $\sqrt{1-m|x|}=x+m$
5) $\sqrt{h(x-1)(x-2)}=x-m$
6) $x+\sqrt{a^2-x^2}=b$ $(a\ et\ b\ paramètre)$

7) $\sqrt{ax+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{(a-1)x}$
8) $\sqrt{x+2}>mx+1$
9) $\sqrt{4x^2+mx+1}\leq 2x-3$
10) $\sqrt{m+\sqrt{x}}+\sqrt{m-\sqrt{x}}<2$
11) $x^4-2x^3+mx^2-2x+1=0$
12) $\frac{m^2x^2-7mx+6}{m^2x^2-6mx-5}\leq 0$
13) $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=m$

Exercice 14 :

A) On considère l'équation de degré n. ($A_0 \neq 0$)

$$f(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0,$$

Dont on désigne les racines, distinctes ou confondues, par $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Montrer que l'équation $F(X) = 0$, obtenue en faisant le changement d'inconnue $x^2 = X$ dans l'équation $f(x).f(-x) = 0$, n'est autre que l'équation qui admet comme racines les carrés des racines de l'équation $f(x) = 0$.

Application :

Former l'équation en X qui admet comme racines les carrés de l'équation

$$f(x) = (m-1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0.$$

B) On note α et β les solutions de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ (avec $a \neq 0$)

On pose : $S_n = \alpha^n + \beta^n$.

Démontrer que : $aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0$.

Exercice 15 :

Le but du problème est la résolution de l'équation (E) : $x^3 + 3x^2 + 15x - 99 = 0$

1. On se ramène à la résolution d'une équation de la forme : $X^3 + pX + q = 0$

a- Trouver trois réels a, p et q tels que :
$x^3 + 3x^2 + 15x - 99 = (x+a)^3 + p(x+a) + q$

b- En posant $x + a = X$, vérifier que : $X^3 + 12X - 112 = 0$

2. On résout l'équation $X^3 + 12X - 112 = 0$ (E_1)

Pour cela on pose $X = u + v$

a- Vérifier que $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$

En déduire que :

- Lorsque $X = u + v$, alors :
$X^3 + 12X - 112 = u^3 + v^3 + (3uv + 12)(u+v) - 112$
- $X = u + v$ est une solution de l'équation (E_1) lorsque $u^3 + v^3 = 112$ et $u^3 . v^3 = -64$

b- Trouver deux nombres u et u tels que $u^3 + v^3 = 112$ et $u^3 . v^3 = -64$

c- Résoudre l'équation (E_1) $\left(Vérifier\ que\ \left(2+\sqrt{2}\right)^3 = 56 + 40\sqrt{2}\right)$

d- Résoudre l'équation (E).

Exercice 16 :

Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ -x+4y-2z=1 \\ 3x+2y-4z=-5 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-2y+z=1 \\ -2x+y+z=1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x+2y+5z=4 \\ x+y+2z=6 \\ 2x+3y+7z=10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{4}{x}+\frac{2}{y-1}+\sqrt{z}=1 \\ \frac{4}{x}-\frac{2}{y-1}+\sqrt{z}=1; \\ \frac{4}{x}+\frac{2}{y-1}+\sqrt{z}=0 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} -a^2+2\sqrt{b}+\frac{1}{c-1}=1 \\ -2a^2+3\sqrt{b}+\frac{1}{c-1}=1 \\ 4a^2+\sqrt{b}+\frac{2}{c-1}=8 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 9x+3y+z+9t=34 \\ 3x+2y-9z+7t=6 \\ -x+y-6z+5t=-3 \\ 7x-4y+4z-6t=29 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 9x+my-z=4 \\ 4mx-2y+(m-1)z=m \\ 5x+(2m-1)y-3z=3(m+2) \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2mx+(m+1)y+z=2 \\ (m+2)x+(2m+1)y+mz=m+2; \\ 5x+(2m-1)y-3z=3(m+2) \end{cases}$

Exercice 17 :

E(x) désigne partie entière du réel x

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système S d'équations suivant : $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+4z=12 \\ 5x+2y+3y=18 \end{cases}$

2. En déduire une résolution du système S' suivant :

$$\begin{cases} E\left(3x+\frac{1}{2}\right)+|y^2-3z|+\sqrt{-3x+1}-z=6 \\ 2E\left(3x+\frac{1}{2}\right)-|y^2-3z|+4\sqrt{-3x+1}-4z=12 \\ 5E\left(3x+\frac{1}{2}\right)+2|y^2-3z|+3\sqrt{-3x+1}-3z=18 \end{cases}$$

Exercice 18 :

1) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x(y+z)+1=3x \\ y(z+x)+1=3y \\ z(x+y)+1=3z \end{cases}$$

2) Les nombres a, b et c n'étant pas nuls, on considère le système suivant :

$$\begin{cases} x+y=a \quad (1) \\ x^2+y^2=b^2 \ (2) \\ x^3+y^3=c^3 \ (3) \end{cases}$$

a) Quelle condition doit-il exister entre les nombres a, b et c pour que le système soit compatible ?
b) Cette condition étant satisfaite, résoudre le système.

Exercice 19 :

Pour assurer une alimentation équilibrée à ses poulets, un éleveur doit leur donner 4 ingrédients A, B , C et D dont les besoins mensuels sont globalement et respectivement estimés à 75 kg, 30 kg , 10 kg et 20 kg. Deux aliments préparés P et Q contiennent ces ingrédients dans les proportions suivantes :

	Ing. A	*Ing. B*	*Ing.C*	*Ing.D*
Aliment P	50%	10%	20%	0%
Aliment Q	30%	20%	0%	40%

1. L'éleveur décide d'acheter dans la limite de la capacité de son véhicule qui est de 400 kg une quantité d'aliments P et Q suffisante pour au moins un mois.

a- Traduire par un système d'inéquations les contraintes relatives à cet achat. Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de ce système.

b- En déduire les répartitions possibles des aliment P et Q sachant qu'ils sont conditionnés dans des sacs de 50 kg.

2. L'éleveur veut effectuer ces achats au moindre coût. Déterminer la répartition mensuelle des produits P et Q dans les cas suivants :

a- Les produits P et Q sont vendus au même prix.

b- Le produit P est 2 fois plus chers que le produit Q

c- Le produit P est 2 fois moins chers que le produit Q

<u>Pensée :</u>

« Soyez un élément de qualité. Certaines personnes ne sont pas habituées à un environnement où l'on attend l'Excellence » Steve Jobs