Axlou Toth pour l'Innovation

NIVEAU : SECONDE S

Calcul dans IR

Calcul approché Intervalles

Exercice 1 :

1) On pose $A = (\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-2)(\sqrt{2+\sqrt{3}})$.

a) Quel est le signe de A ? Calculer A^2.

b) En déduire une écriture simple de A.

2) Soit $B = \sqrt{12-3\sqrt{7}} - \sqrt{12+3\sqrt{7}}$.

a) Déterminer le signe de B. Calculer B^2.

b) En déduire une écriture simple de B.

3) Simplifier $X = \sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.

4) Simplifier $Y = \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right):\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)\cdot$

5) Simplifier $Z = \frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n+1})^3}\cdot$

Exercice 2 :

Soit les réels a, b et c.

1) Développer $(a+b+c)(ab+bc+ca)$.

2) Développer $(a+b+c)^2$ et $(a+b+c)^3$.

3) Démontrer que si $a+b+c=0$ alors $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Exercice 3 :

1) a) a, b et c sont des réels distincts. Montrer que : $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=0\cdot$

b) Soit trois réels non nuls a, b et c tels que : $ab+bc+ca=0$.

Calculer la somme : $S=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\cdot$

c) Démontrer que, si $2x+4y=1$, alors : $x^2+y^2 \geq \frac{1}{20}\cdot$

2) Soit a et b deux réels positifs.

a) Prouver que : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$. (I)

b) En déduire que : $a + b = 1$ implique $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ et $ab \leq \frac{1}{4}$.

c) En déduire aussi de l'inégalité (I) que :

$0 < a, 0 < b$ et $a + b = 1$ impliquent $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

Exercice 4 :

1) Soient deux réels x et y, strictement positifs.

Démontrer que $\frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2xy}$ et que : $\frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$.

2) Soient trois réels a, b et c, strictement positifs.

Démontrer que : $\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Exercice 5 :

Soit n un entier naturel non nul.

1) Démontrer que $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$;

2) Démontrer que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$;

3) Comparer $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ et $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$;

4) Pour quelles valeurs de n a-t-on $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{10}$?

Exercice 6 :

1) Soient a et b deux réels strictement positifs. Prouver que : $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$;

2) Soit a, b et c trois réels strictement positifs. Démontrer que :

$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

Exercice 7 :

Les nombres p et q étant des entiers naturels non nuls, démontrer l'équivalence suivante :

(1) $\frac{p}{q} < \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{p+3q}{p+q} > \sqrt{3}$. Plus généralement, les nombres p, q et α étant des réels tels que $p > 0$, $q > 0$ et $\alpha > 1$, démontrer l'équivalence suivante :

(2) $\frac{p}{q} < \alpha \Leftrightarrow \frac{p+\alpha^2 q}{p+q} > \alpha$.

Exercice 8 :

x et y sont deux nombres réels tels que $|x| < 1$ et $|y| < 1$.

1) Démontrer que : $|xy| < 1$. En déduire que : $1 + xy > 0$.

2) Développer $(1 - x)(1 - y)$ et $(1 + x)(1 + y)$.

3) Démontrer que : $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$.

Exercice 9 :

Compléter le tableau suivant :

Valeur absolue $\lvert x - x_0\rvert \leq r$	Distance $d(x; x_0) \leq r$	Intervalle $[a; b]$	Encadrement $a \leq x \leq b$
$\lvert x + 1\rvert \leq 2$			
			$-2 \leq x \leq 3$
	$d(x; -1) < 3$		
		$[-4; 6]$	

(x_0 désignant le centre de l'intervalle $[a; b]$).

Exercice 10 :

1) Soit $p \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\sqrt{p+1} - \sqrt{p}$ est l'inverse de $\sqrt{p+1} + \sqrt{p}$.

2) En déduire une expression simple de la somme :

$$S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{63}+\sqrt{64}}\cdot$$

3) Déterminer le plus grand entier naturel n tel que :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} < 9\cdot$$

Exercice 11 :

1) On pose $A = [-2; 2]$ et $B =]-\infty; 0[$.

 a) Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

 b) Déterminer l'ensemble des réels x n'appartenant ni à A ni à B.

2) Ecrire sous forme d'intervalle l'ensemble S des réel x satisfaisant aux conditions précisées dans chacun des cas suivants :

 a) $x \leq 3$ et $0 < x \leq 4$.

 b) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$ ou $0 < x$.

Exercice 12 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\left|\frac{17}{8} - 2x\right| = \frac{9}{4}$; **2)** $|2x - 3| = 1 - \sqrt{2}$; **3)** $|2x| + |x| = |x^2|$; **4)** $\frac{3x-4}{|x+5|} = -2$;

5) $|x - 2| = x - 2$; **6)** $|2x + 8| + |x - 7| = 0$; **7)** $|2x - 3| + |3x - 5| = x - 1$;

8) $\mathrm{E}(x) = 2$; **9)** $\mathrm{E}(x) = 2x - 5$; **10)** $|x - 2| = |x^2 - 4x + 4|$; **11)** $\left|\frac{x+3}{-x+1}\right| = 3$;

12) $|x - 6| = |x + 8|$; **13)** $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 0{,}3$; **16)** $|3x - 5| = 2x + 3$.

Exercice 13 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $(4x+5)^2-(2x+8)^2 \leq 8x^3-27$; **2)** $\frac{x-1}{x-2} \leq 4$; **3)** $\frac{1}{1+x} \geq \frac{3}{1+x^3}$; **4)** $\begin{cases} -3x-5 \leq \frac{8x-1}{2} \\ x+7 \geq 4x+1 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} (x+5)(x-2) > 0 \\ \frac{x+3}{7-2x} \leq 0 \end{cases}$; **6)** $|x+2| < -2$; **7)** $|x-2| \geq \frac{-1}{2}$; **8)** $\sqrt{(2x-1)^2} < 2$;

9) $|2x+3| \geq |7x-12|$; **10)** $|3x-5| \leq 2x+3$; **11)** $|x+6|+|x-10| < 16$;

12) $1 < |3x-1| \leq 3$; 13) $\begin{cases} |x-2| < 1 \\ |x-\sqrt{2}| \geq 1 \end{cases}$; **14)** $\left|\frac{1}{1-x}\right| \leq \frac{1}{2}$; **15)** $\frac{|x+1|}{1-|x|} \geq 0$; **16)** $\mathrm{E}(x-2) \geq -5$.

Exercice 14 :

1) On considère les nombres réels x et y tels que : $-2 \leq x \leq -1$ et $2 \leq y \leq 3$.

Encadrer les nombres réels U et V définis par $U=(1-x)(1-y)$ et $V=\frac{1-y}{1+xy}$.

2) Sachant que $x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$, encadrer $h(x)=-2x^2+x-1$.

Exercice 15 :

1) Soit $-7{,}4 \leq x \leq -7{,}3$.

a) Donner une valeur approchée de x et préciser l'incertitude.

b) Donner une valeur approchée de x par excès et par défaut et préciser dans chaque cas l'incertitude.

2) Traduire les phrases suivantes par un encadrement.

a) 1,21 est une valeur approchée de x à 2.10^{-2} près

b) 2,25 est une valeur approchée de x par défaut à 10^{-3} près

c) 3,12 est une valeur approchée de x par excès à 2.10^{-1} près.

3) Sachant que $|\sqrt{30}-5{,}4772| \leq 5.10^{-5}$ encadrer $\sqrt{30}$ à 125.10^{-6} près puis donner une valeur approchée de $\sqrt{30}$ à 125.10^{-6}.