Axlou Toth pour l'Innovation

NIVEAU : SECONDE S

CALCUL BARYCENTRIQUE

Exercice 1:

On donne les points A et B. Trouver les nombres réels α et β pour que le point G soit le barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β) dans chacun des cas suivants :

1) $2\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\alpha + \beta = 6$;

2) $3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et $\alpha + \beta = -3$;

3) $\overrightarrow{BG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\alpha + \beta = 1$;

4) Pour tout point M du plan, $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$ et $\alpha + \beta = -1$.

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle et le point F défini par $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Soit H le point tel que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$.

1) Déterminer des réels b et c tels que F soit le barycentre de $(B; b)$ et $(C; c)$.

2) Montrer que H est le barycentre des points A, B et C, affectés de coefficients à déterminer.

3) En déduire que les points A, F et H sont alignés.

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle. On appelle I le barycentre du système $\{(A; 2), (B; -3)\}$, J le barycentre de $\{(B; 3), (C; 1)\}$ et K le barycentre de $\{(A; 2), (C; -1)\}$.

1) Faire une figure.

2) On se propose de démontrer que les droites (CI), (AJ) et (BK) sont concourantes.

Démontrer que le barycentre, noté G, du système $\{(A; 2), (B; -3), (C; -1)\}$ appartient à chacune de ces droites. Conclure.

Exercice 4 :

Soit A, B et C trois points non alignés du plan.

1) Construire les points I et J barycentres respectifs des systèmes

$\{(A; 1), (B; 1), (C; -1)\}$ et $\{(A; -1), (B; -1), (C; 3)\}$.

2) Montrer que C est le milieu du segment $[IJ]$.

3) On désigne par G_k le barycentre des points $(A; 1), (B; 1), (C; 1 + k)$ et $(I; k)$.

a) Montrer que G_k est le barycentre de $(C; 2+k)$ et $(I; k+1)$.

b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles G_k est sur le segment [IC].

Exercice 5 :

On considère trois points A, B et C non alignés affectés des coefficients 1, 2 et -3.

1) Ces points ont-ils un barycentre ?

2) Montrer que lorsque le point M se déplace dans le plan, le vecteur $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$ reste constant. On note $\vec{u}$ ce vecteur constant.

3) Construire les barycentres : A' de $(B; 2)$ et $(C; -3)$; B' de $(C; -3)$ et $(A; 1)$; C' de $(A; 1)$ et $(B; 2)$.

On se propose de démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

a) Démontrer que $\vec{u}=-\overrightarrow{AA'}=-2\overrightarrow{BB'}=3\overrightarrow{CC'}$

b) Conclure.

Exercice 6 :

Soit un triangle ABC rectangle en A tel que : $AB=4$ et $AC=6$.

1) Placer le point G tel que $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Calculer la distance AG.

2) Démontrer que G est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients que l'on Déterminera .

3) Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que :

$\left\|-\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=10$. Montrer que E passe par C et A.

Exercice 7 :

1) On considère un triangle ABC et G le barycentre de $\{(A,1),(B,2),(C,1)\}$. Construire G.

2) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AC$

3) Soit E l'ensemble des points N tels que $\left\|\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right\|$

a) Montrer que le point B appartient à E.

b) Déterminer et représenter E.

4) Déterminer et représenter l'ensemble F des points P tels que $\left\|\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}\right\|$

Exercice 8 :

On considère un parallélogramme ABCD, m étant un réel G_m le barycentre de (A ; 2m) (B, 1 - m) et (C, 2 – m)

1) Montrer que G_m existe pour tout réel m
2) Caractériser G_1 et placer sur le dessin
3) Exprimer $\overrightarrow{AG_m}$ en fonction de m et de $\overrightarrow{AB}$et$\overrightarrow{AC}$
4) En déduire que $\overrightarrow{G_1G_m}=\frac{1-m}{3}\overrightarrow{AD}$
5) Quel est l'ensemble des points G_m lorsque m décrit IR ? représente cet ensemble sur le dessin

6) Construire G_0

Exercice 9 :

Soit ABC un triangle et soit m un réel

1) Pour quelles valeurs de m est – il possible de définir le point G_m barycentre de (A,1) (B,2) et (C,m)
2) Placer sur un même dessin les points G_m correspond à m = 1 ; m = 2 : m = 3 et m = - 1
3) Quel est l'ensemble des points G_m lorsque m prend toutes les valeurs de IR
4) Soit K la symétrie de G_{-1} par rapport à C justifier que K est un point de G_m pour une valeur m que l'on déterminera

Exercice 10:

Soit ABC un triangle, on désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$.

1) Construire G le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, 2)$.

2) Soit H le point défini par : $3\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

a) Montrer que les points H, C et G sont alignés.

b) Montrer que les points H, I et J sont alignés.

c) En déduire une construction de H.

3) La droite (AH) coupe la droite (BC) en K.

Montrer que K est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(H, -2)$.

4) Déterminer et construire les ensembles suivants :

a) $\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 6\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MH}\|$.

b) $\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MJ}\|$.

c) $\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = 10$.

Bonne dégustation scientifique !