Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2019-2020 **Lycée :** Cours d'encadrement Scientifique de Axlou Toth	**Série d'Exercices n°5** **Ensembles et applications**	**Niveau** : 1S1/C **Professeur** : M. Diallo

Exercice 1 :

Parmi les correspondances suivantes, préciser celles qui sont des applications.

a) $\begin{array}{l} f : IR \to IR \\ x \mapsto |x| \end{array}$; b) $\begin{array}{l} g : IR \to IR \\ x \mapsto x-\sqrt{x} \end{array}$; c) $\begin{array}{l} h : [2,+\infty[\to IR \\ x \mapsto \sqrt{x-2} \end{array}$; d) $\begin{array}{l} k : [0,+\infty[\to IR \\ x \mapsto \dfrac{1}{x-1} \end{array}$

Exercice 2 :

Soit f l'application de $\mathbb{R} - \{ 2 \}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{3x - 11}{x - 2}$.

1) Soit x un réel tel que $3 \leq x \leq 8$.

a) Encadrer successivement $x - 2$, $-\dfrac{5}{x-2}$ et f(x).

b) En déduire l'image directe par f de l'intervalle [3 ; 8].

2) Déterminer l'image réciproque de : a) – 5 ; b) 3 ; c)] -∞; 1[; d) $\mathbb{R} - \{3\}$.

Exercice :

On considère les applications f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6 de $IR \setminus \{0;1\}$ vers lui-même définies par :

$f_1(x) = x$; $f_2(x) = 1-x$; $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$; $f_4(x) = \dfrac{x}{x-1}$; $f_5(x) = \dfrac{x-1}{x}$; $f_6(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Déterminer $f_i o f_j$ pour $i = 1,2,...,6$ et $j = 1,2,...,6$.

Exercice 4 :

Dans chacun des cas suivants f est une relation.
Est-elle une application ? Est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

a) f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

b) f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2-1} - 1$

c) f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

d) f : [0 ; +∞[$\to \mathbb{R}$: $x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

e) f : $\mathbb{R} \to$]-1 ; 1] : $x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

f) f : [0 ; +∞[$\to$ [0 ; 1] : $x \mapsto f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

g) f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $x \mapsto 2x^2 + 3x$

h) f : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $(x, y) \mapsto (x-y, 3+y)$

i) f : $\mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$: $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$

Exercice 5 :

Soit f une application de l'ensemble $E=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ dans lui-même définie par :

$f(1)=4;\ \ f(2)=1;\ \ f(3)=2;\ \ f(4)=2$.

1. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ (ensemble des parties de f), $f(\{1,\ 3\})$ *et* $f(\{3,\ 4\})$.
2. Déterminer $f^{-1}(E)$, $f^{-1}(\{1,4\})$, $f^{-1}(\{2\})$ *et* $f^{-1}(\{3\})$

Exercice 6 :

Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $f(x)=x^2$.

1) Déterminer les ensembles suivants :

$f([-3,\ -1])$, $f([-2,\ 1])$, $f([-3,\ -1]\cup[-2,\ 1])$

et $f([-3,\ -1]\cap[-2,\ 1])$

2) Déterminer les ensembles suivants :

$f^{-1}(]-\infty,\ 2])$, $f^{-1}([1,\ +\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty,\ 2]\cap[1,\ +\infty[)$

et $f^{-1}(]-\infty,\ 2]\cup[1,\ +\infty[)$

Exercice 7 :

A) Soit f et g les fonctions définies par

$$f : IR \to IR,\quad x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2+2} \qquad\qquad g : IR \to IR,\quad x \mapsto -2x^2+1$$

1. Montrer que pour tout $x \in IR, f(x) = 1 - \frac{1}{x^2+2}$

2. Etudier la parité de f .

3. Démontrer que $\forall$ x ϵ IR on a : $\frac{1}{2} \leq f(x) < 1$.

4. Démontrer que $\forall$ x ϵ IR on a : $-1 < gof\ (x) \leq \frac{1}{2}$.

5. f est-elle injective, surjective, bijective.

B) 1) Soit h la restriction de f sur $[0; +\infty[\ \to \left[\frac{1}{2}; 1\right[$

a) Montrer que h est bijective
b) Donner sa bijection réciproque

Exercice 8 :

A) On considère les fonctions f et g définie par $f(x) = \sqrt{x} + 1$ et $g(x) = 2x - 1$

1) Détermine $D_{f\circ g}$ puis $f \circ g$

2) On pose $h(x) = \sqrt{2x-1} + 1$

a) Déterminer D_h

b) Montrer que h est bijective de $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ sur $[1,+\infty[$

c)Déterminer l'expression de h^{-1} , bijection réciproque de

d) Montrer que $\forall x \in [1,+\infty[$, $h \circ h^{-1}(x) = x$

B) Soit f l'application définie de IR vers IR par $f(x) = x^2 + 2x$

1) f est-elle surjective, injective ?

2) Montrer que h la restriction de f sur $]-1;\ +\infty[$ vers $]-1;\ +\infty]$ est bijective

3) Définir sa bijection réciproque ;

Donner alors l'antécédent de 9 par f

Exercice 9 :

1) Soit f: IR $\rightarrow$ IR par $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$.

a) Montrer que $f(2-x) = f(x)$ pour tout x de IR

b)f est elle injective ? Justifier .

c)Quels sont les antécédents par f de 1 et 4 ?

d)f est-elle surjective ?

2) Soit l'application $g:]1;+\infty[\rightarrow]-\infty;3[$ par $g(x) = -2x^2 + 4x + 1$

Montrer que g est une bijection et expliciter g^{-1}

3) Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{x}{E(x)-2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de h

b) Déterminer l'ensemble de définition de hog

c) Déterminer l'ensemble de définition de goh

d) Montrer que $goh(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + 1$ pour tout $x \in [4;5[$

Exercice 10 :

Soit la correspondance : f: IR $\rightarrow$ IR

$$x \mapsto \sqrt{|1-x^2|}$$

1) Justifie que f est une application
2) Soit g la restriction de f sur :$[1\ ;+\infty[$
   a) Montre que $g(x) = \sqrt{x^2-1}$
   b) Détermine l'image directe par g de $A = \{1;2;3\}$
   c) Détermine l'image réciproque par g de $B =]1;4]$
   d) Montre que g est une bijection de :$[1\ ;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser
   e) Donne l'écriture de g^{-1}
3) On définit la fonction h par $h(x) = \frac{x+1}{x-3}$
   a) Détermine Dgoh et Dhog.
   b) Explicite goh(x).

Exercice 11 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, suivant les valeurs du paramètre m, l'équation $(1) : -x^2 + x - m = 0$.
2) On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + x$.
   a) Interpréter graphiquement l'équation (1).
   b) f est-elle injective ? surjective ?
   c) Montrer que la restriction k de f à l'intervalle $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ réalise une bijection de I sur J, à préciser. Définir k^{-1}.

Exercice 12 :

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x|x|$.

1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer l'application réciproque, f^{-1}.
3) Construire, dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

Exercice 13 :

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1+\sqrt{x^2-1}}{1-\sqrt{x^2-1}}$

1) a) f est-elle une application ? Pourquoi ?

   b) Déterminer le plus grand ensemble D tel que f soit une application

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = y$ où y est un paramètre réel

   b) L'application $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est-elle injective ? Surjective ?

3) a) Déterminer deux parties E *et* F de $\mathbb{R}$, les plus grands possibles pour que l'application $g: E \rightarrow F, x \rightarrow g(x) = f(x)$ soit bijective

   b) Expliciter $g^{-1}(x)$

Exercice 14 :

1. On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = \sqrt{4-x}$ et $g(x) = \sqrt{9-x^2}$
   a) Déterminer les domaines de définition des fonctions f et g.
   b) Déterminer le domaine de définition de gof puis calculer gof(x)
2. Soit la fonction h définie sur IR par $h(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$.

a- Etudier la parité de la fonction h.
b- Montrer que pour tout réel $h(x) \geq 0$.
c- Montrer que pour tout réel x, h(x) est bornée.
d- Résoudre l'équation d'inconnue x : h(x) = y où y est un réel positif donné
e- Démontrer que la fonction h est bijective de $]-\infty; 0[$ vers $]0; 1[$
f- Déterminer sa bijection réciproque h^{-1}.

3. Soit k la fonction définie par $k(x) = \frac{x^2}{|x|\sqrt{x^2+1}}$
   a- Les fonctions h et k sont-elles égales ? justifier votre réponse.
   b- Déterminer la plus grande partie E de IR sur laquelle h et k ont la même restriction

Exercice 15 : Autour de la fonction partie entière

I) Soit $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$

$x \mapsto E(x)$

h est-elle injective, surjective ?

II) Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-1)^{E(x)}x + (-1)^{[(-1)^{E(x)}]}$

1) a)Soit $\forall n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\forall\, x \in [n, n+1[$, on a :

$$f(x) = (-1)^n x + (-1)^{[(-1)^n]}$$

b) En déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R}\;\; f(x) = x - 1 \;ou\; f(x) = -x - 1$

c) Représenter graphiquement la restriction de f à $[-6; 6[$

2) a) Montrer que f n'est ni paire, ni impaire, ni périodique

b) f est-elle croissante ? décroissante ? pourquoi ?

c) f est-elle bijective ? Pourquoi ?

3) En utilisant 1-c déterminer $f([-5; 5[\,)$.

Exercice 16 :

On considère les fonctions définies par : $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{x}}{|\mathrm{x}|+1}$ et $\mathrm{g(x)} = \sqrt{\mathrm{x} - \mathrm{E(x)}}$

1) Démontrer Df et Dg
2) a) Démontrer que $\forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{x} - |\mathrm{x}| - 1 \leq 0$ et $\mathrm{x} + |\mathrm{x}| + 1 \geq 0$
   En déduire que f est bornée sur $\mathbb{R}$

   b) Montrer g est bornée sur $\mathbb{R}$

3) a) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$

   b) g est-elle bijective de $\mathbb{R}$ sur $[0; 1]$?

Exercice 17 :

Soit les fonctions : $\varphi: \mathbb{R} \to [0; 1]$ et $h: [0; 1] \to [0; 1]$

$x \mapsto x - E(x)$ $\qquad$ $x \mapsto |2x - 1|$

1) Soit $f = ho\varphi$. Montrer que f est une fonction paire, périodique de période 1.
2) Soit F la restriction de f à $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
   Démontrer que F admet une fonction réciproque F^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble image.
3) Soit $g = F^{-1}of$. Démontrer que g est une fonction paire, définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 1.
4) Soit $k \in \mathbb{Z}$, dans les deux cas suivants, exprimer $g(x)$ en fonction de $x \;et\; k$:
   a) $x \in \left[k, k + \frac{1}{2}\right[$ $\qquad$ b) $x \in \left[k - \frac{1}{2}, k\right[$

Exercice 18 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x - E(x)}}$ où E(x) désigne la partie entière de x

1- Déterminer D_f

2- Soit k un entier relatif

a- Calculer $f(x+k)$ pour $x \in D_f$

b- Comparer alors $f(x)$ et $f(x+k)$

3- Soit $n \in \mathbb{Z}$. On désigne par g la restriction de f à $]n;n+1[$.

a- Donner l'expression de g(x) pour $x \in]n;n+1[$

b- Démontrer que g est une bijection de $]n;n+1[$ sur un intervalle que l'on déterminera

c- Déterminer alors g^{-1}

Exercice 19 :

Partie A :

Soient A et B deux points distincts du plan et $f: IR \to (AB)$

$$x \mapsto f(x) = bar\{(A,1);(B,x)\}$$

1) Déterminer Df

2) Trouver $I \subset IR$ et $J \subset (AB)$ pour que $f: I \to J$ soit bijective

Partie B :

Soit $f: IR \to IR$ par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

1) f est-elle une application ?

2) f est-elle injective ? Surjective ? bijective ?

3) Montrer que $f(IR) = [-1;1]$

Partie C :

Soit l'application f : IR×IR ⟶ R×IR : (x ; y) ⟶ (x – 2y ; x + 3y)
1) Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.
2) Pour tout couple (x ; y) ∈ IR×IR : déterminer fof(x).

Exercice 20 :

On considère l'application de IR vers IR définie par : $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, x \leq 0 \\ -\sqrt{x} + 1, x > 0 \end{cases}$

1. Déterminer fof(x).
2. Montrer que f est une bijection de IR vers IR puis calculer $f^{-1}(x)$.
3. On considère l'application g de IR vers IR définie par $g(x) = x^2 + 2x$.Déterminer fog(x).

Exercice 21 :

Soit $f(x) = ax^2 + b|x|$ avec $a > 0$ et $b > 0$
1) Montrer que f n'est pas bijective de R dans R
2) Trouver deux ensembles I et J de R tels que f soit bijective I dans J.

Exercice 22 :

Soit $a \in]-1,1[$ et φ_a l'application définie de $]-1,1[$ vers $]-1,1[$ par : $\varphi_a(x) = \frac{x+a}{1+ax}$
1. Déterminer$\varphi_{-a} o \varphi_a$.
2. Montrer que φ_a est une bijection et déterminerφ_a^{-1}.

Exercice 22 :

Soit f l'application de IN vers IN définie par :

$$\begin{cases} f(n) = \dfrac{n}{2}, \textbf{ si n est pair} \\ f(n) = \dfrac{n+1}{2}, \textbf{ si n est impair} \end{cases}$$

Cette application est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 23 :

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F et A, B deux parties de E.

1) Démontrer que : $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
2) Démontrer que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3) a)Démontrer que : $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
   b) Démontrer que si f est injective, alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
4) On suppose que E = F = IR, A=[-3 ;1], B=[0 ;5] et f est définie par : $f(x) = |x|$.

   A-t-on $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?

Exercice 24 : Injection, Surjection

Soit E, F et G des ensembles non vides. On considère les applications suivantes : $f: E \to F$ et $g: F \to G$

1) Montrer que gof injective implique f est injective
2) Montrer que gof injective et f surjective sur F implique g est injective
3) Montrer que gof surjective sur G implique g surjective sur G

Montrer que gof surjective sur G et g injective implique f est surjective sur F

Exercice 25 : Concours Junior Polytech 2015

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(-1) = 1$ et que $\forall\ x \neq 0,\ f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1\ \ (1)$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)\ \ (2)$$

1) Calculer $f(0)$ et montrer que f est impaire
2) a) Montrer que pour tout entiers k et pour tout réel a, $f(ka) = kf(a)$
   b) Prouver que pour tout rationnel x, $f(x) = x$
3) Prouver que $\forall x \epsilon\ \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x)^2$
4) En déduire que f est croissante.

Exercice 26 :

Soit (E_ψ) l'ensemble des fonctions ψ définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

Pour tout couple de réels (x, y): $\psi(x) - \psi(y) = (x^2 - y^2)\psi(x)\psi(y)$.

1) a) Montrer que 1 et -1 ont même image par ψ.
   b) Si $\psi(0) = -1$, calculer $\psi(1), \psi(2)$ et $\psi\left(-\frac{1}{2}\right)$.

2) Montrer que les éléments de (E_ψ) sont des fonctions paires.
3) Soit f une fonction de l'ensemble $(E_\psi) \setminus f(0) = a$.
4) Soit $a < 0$ et g la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par $g(x) = \frac{a}{1-ax^2}$
   a) Déterminer la plus grande partie E de $\mathbb{R}$ qui rend g surjective
   b) Déterminer que g est une bijection de $]-\infty; 0]$ sur E.
   c) Expliciter $g^{-1}(x), x \in E$.
5) Etudier les variations de g.

Pensée :

« Soyez un élément de qualité. Certaines personnes ne sont pas habituées à un environnement où l'on attend l'Excellence » Steve Jobs