Axlou Toth pour l'Innovation

NIVEAU : SECONDE S

ANGLES ET TRIGONOMÉTRIE

Exercice 1 :

Soit un demi-cercle de diamètre $[CA]$, O le milieu de $[CA]$, B le milieu de l'arc AC, P un point de l'arc AB et I le milieu de l'arc PB. Les droites (CP) et (OI) se coupent en un point M.

1) Déterminer les mesures des angles $\widehat{BPC}$ et $\widehat{BMC}$.

2) En déduire que le quadrilatère $OCBM$ est inscriptible dans un cercle dont on précisera un diamètre.

3) Quel est le lieu du point M lorsque P parcourt l'arc AB ?

Exercice 2 :

Soit (C) et (C') deux cercles de même rayon, sécants en A et B. Une droite (D), passant par A, recoupe (C) en E et (C') en E'. La droite symétrique de (D) par rapport à (AB) coupe (C) en F et (C') en F'. Démontrer que le quadrilatère $EE'FF'$ est inscriptible. On pourra envisager deux cas de figure.

Exercice 3 :

Soit un triangle ABC et O le centre de son cercle circonscrit C. La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe (BC) en E et recoupe C en D. La droite (OD) coupe (BC) en I.

Montrer que I est le milieu de [BC].

Exercice 4 :

Soit un triangle ABC isocèle en A et dont l'angle $\widehat{A}$ est aigu. On désigne par H le pied de la hauteur issue de A, par D le point d'intersection de (BC) et de la perpendiculaire en A à la droite (AB) et par E le projeté orthogonal de D sur (AC)

1) Montrer que les points H, A, D et E sont situés sur un même cercle.

2) Citer les angles géométriques de la configuration décrite ci-dessus, de même mesure que $\widehat{BAH}$.

3) En déduire que la droite (DC) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ADE}$.

Exercice 5 :

1) Convertir en degrés les angles suivants donnés en radians : $-\frac{4\pi}{5}; \frac{5\pi}{3}; \frac{\pi}{12}; \frac{-7\pi}{6}; \frac{49\pi}{13}$.

2) Convertir en radians les angles suivants donnés en degrés : $36°; -54°; -210°; 405°; 2655°$.

3) Calculer la longueur d'un arc de cercle de rayon $R = 4\ cm$ et d'angle α : $\alpha = \frac{2\pi}{3}$; $\alpha = 36°$.

Exercice 6 :

1) Donner la mesure principale des angles dont une mesure est :

$\frac{3\pi}{2}$; 2π; -62π; $-\pi$; -5π; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{-32\pi}{5}$; $\frac{749\pi}{13}$; $613°$; $-718°$ et $2655°$.

2) Dans chacun des cas suivants, dire si x et y sont des mesures d'un même angle orienté ou non.

a) $x = \frac{\pi}{2}, y = -\frac{3\pi}{2}$; **b)** $x = \frac{2\pi}{3}, y = -\frac{\pi}{3}$; **c)** $x = -\frac{5\pi}{4}, y = \frac{3\pi}{4}$; **d)** $x = -\frac{5\pi}{12}, y = \frac{43\pi}{12}$.

Exercice 7 :

1) Construire un triangle équilatéral ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Quelles sont les mesures principales en radians des angles orientés $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}\right)$?

2) On construit extérieurement au triangle ABC le carré $ACDE$.

Déterminer les mesures principales des angles :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE}}\right)$.

Exercice 8 :

Sur le cercle orienté de centre O et de rayon 4, on considère un point A.

Placer les points B, C, D, E et F tels que :

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{3}$; $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{5\pi}{6}$; $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{6}$; $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}) = -\frac{\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF}) = -\frac{\pi}{6}$.

1) Déterminer en radians la mesure principale des angles orientés :

$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$, $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE})$, $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF})$ et $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OA})$.

2) Calculer les mesures en radians des arcs : BC, CD, DE et EF.

Exercice 9 :

1) x est un nombre réel. Utiliser les relations trigonométriques pour exprimer les expressions suivantes

en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

a) $\cos(-x) + \sin(-x) + \sin(\pi + x) + \cos(\pi - x)$;

b) $2\sin(4\pi - x) - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{13\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) - \sin(7\pi - x)$.

2) Simplifier les expressions suivantes :

a) $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$;

b) $\sin^4 x - \cos^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x$;

c) $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x$.

3) Soit x un nombre réel. Démontrer les égalités suivantes :

a) $\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = 1$;

b) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

c) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$, si $\cos x \neq 0$.

Exercice 10 :

Déterminer les lignes trigonométriques des réels suivants :

1) $\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{-\pi}{3}$. **2)** $\frac{-\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}$. **3)** $\frac{5\pi}{6}; \frac{-\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}$. **4)** $\frac{-8\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}; \frac{-13\pi}{4}$.

Exercice 11 :

1) Sachant que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.

2) En déduire : $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{5\pi}{12}$, $\tan\frac{7\pi}{12}$, $\tan\frac{11\pi}{12}$ et $\cos\frac{13\pi}{12}$.

Exercice 12 :

On donne $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

1) Montrer que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$;

2) Utiliser les relations trigonométriques pour donner les valeurs exactes de :

$\sin\frac{4\pi}{5}$; $\cos\frac{4\pi}{5}$; $\sin\frac{3\pi}{10}$; $\cos\frac{3\pi}{10}$; $\sin\frac{6\pi}{5}$; $\cos\frac{6\pi}{5}$; $\sin\frac{7\pi}{10}$; $\cos\frac{7\pi}{10}$.

Exercice 13 :

1) On donne $\cos a = -\frac{4}{5}$ et $\pi \leq a \leq 2\pi$. Calculer :

$\sin a$; $\sin(-a)$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$; $\sin\left(-\frac{\pi}{2} + a\right)$; $\tan a$; $\tan(\pi - a)$.

2) Le réel x est un nombre de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ et $\sin x = \frac{3}{5}$.

Calculer $\cos x$ et $\tan x$ (sans calculer x).

3) Le réel x est un nombre de l'intervalle $\left]\pi; \frac{3\pi}{2}\right[$ et $\cos x = \frac{-2}{3}$.

Calculer $\sin x$ et $\tan x$ (sans calculer x).

Exercice 14 :

Soit un nombre réel α tel que : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A tel que : $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right) = 2\alpha$.

H et I sont les pieds des hauteurs issues respectivement de A et B.

On pose : $a = AB$.

1) Démontrer que : $BC = 2a\sin\alpha$.

2) Démontrer que : $BI = BC\cos\alpha$.

3) Démontrer que : $BI = a\sin 2\alpha$.

4) En déduire que : $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

5) Application : Sachant que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, déterminer $\sin\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Exercice 15 :

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A tel que : $BC = a$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{2\pi}{5}$.

La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe le côté $[AC]$ en D. Faire une figure.

1) Démontrer que : $AD = BD = a$.

2) Démontrer que $AB = 2a\cos\frac{\pi}{5}$ et $CD = 2a\cos\frac{2\pi}{5}$. En déduire que : $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$.

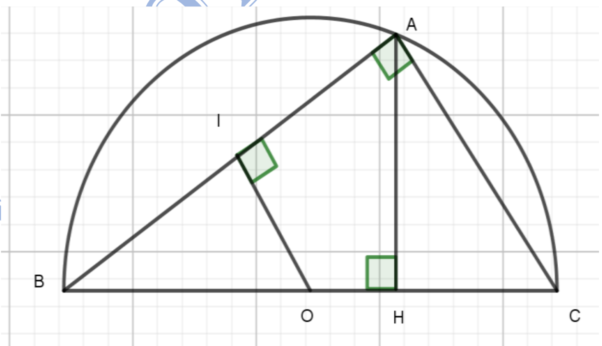
3) On appelle H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$.

Calculer $[BH]$ en fonction de a de deux manières différentes et en déduire que : $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$.

4) En remarquant que $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$, calculer : $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$.

5) Calculer $\sin\frac{\pi}{5}$.

Exercice 16 :



Soit le demi-cercle ci-contre de centre O et de diamètre BC = 2. A est un point de ce demi-cercle tel que $\widehat{COA}$ soit aigu.

On note α est la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$. et H le projeté orthogonal de A sur [AB) et I celui de O sur [AB).

1. Démontrer que I est le milieu de [AB] et que $OH = \cos 2\alpha$.
2. Exprimer AB en fonction de cos α .
3. Démontrer que $BH = 2\cos^2\alpha$ et $OH = 2\cos^2\alpha - 1$.
4. En déduire que : $\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$ et $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

Application : Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$; $\cos\frac{\pi}{12}$; $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Indications :

a. Utiliser le triangle ABC rectangle en A et la propriété de la droite des milieux dans ce triangle.

Pour le calcul de OH, utiliser le triangle isocèle OAC en O, montrer ensuite que

$(\overrightarrow{OC} . \overrightarrow{OA}) = 2\alpha$ et calculer cos2α dans le triangle rectangle AOH.

b. Calculer cosα dans les triangles rectangles ABC et ABH puis faire le produit et conclure

Exercice 17 :

a. Construire un triangle rectangle ABC rectangle en A dont l'hypoténuse a pour longueur 8 cm et que $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{8}$.

b. Soit H le pied de la hauteur issue de A et O le milieu de [BC]

Calculer les mesures des angles du triangle AOH. En déduire la longueur exacte de [OH] puis celles de [AB] et [AC].

c. Déterminer les valeurs exactes de $\sin\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{\pi}{8}$.

Indication : Considérer que tout triangle rectangle est inscriptible dans un cercle de diamètre l'hypoténuse et du fait que OAB isocèle en O.

Exercice 18 :

L'unité de longueur est le centimètre.

ABCD est un trapèze isocèle de bases [AB] et [CD] tel que : AB = 10, BC = 4 et $\widehat{ABC} = 65°$.

H est le projeté orthogonal de C sur (AB).

1. Calculer les valeurs approchées à 1 mm prés des longueurs CH et CD.

2. Donner la mesure en degrés de $\widehat{ABD}$. En déduire la longueur des diagonales du trapèze ABCD.

Exercice 19 :

Soit ABC un triangle isocèle, de sommet principal A tel que BC = a et $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{5}$.
Soit (BD) la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ (D ∈ (AC)). On pose BC = a.
1. Calculer les mesures en radians des angles $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABD}$.
2. Démontrer que BD = AD = a.
3. a. Démontre que $AB = 2a\cos\frac{\pi}{5}$ et $CD = 2a\cos\frac{2\pi}{5}$;

b. En déduire que $\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{3}{2}$; **(1)**

4. a. Démontrer que $BC = 4a\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$;

b. En déduire que $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$; **(2)**

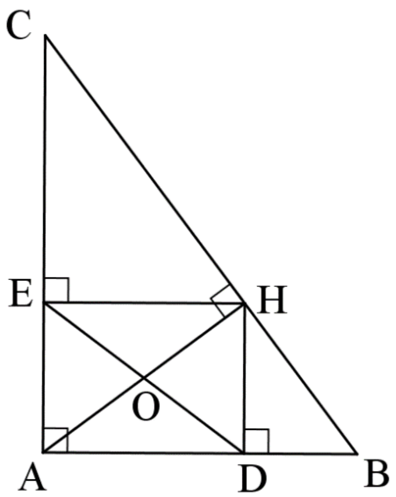
5. On pose $x = \cos\frac{\pi}{5}$ et $y = \cos\frac{2\pi}{5}$.
a. En utilisant les relations **(1)** et **(2)** et l'égalité $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$, calculer x+y ;
b. En déduire $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Exercice 20 :

On considère un triangle ABC rectangle en A.

Soit H le pied de la hauteur issue de A, D le projeté orthogonal de H sur (AB) et E celui de H sur (AC).

Démontrer que le quadrilatère BCED est inscriptible dans un cercle.



Bonne dégustation scientifique !