Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2019-2020 **Lycée :** Cours d'encadrement Scientifique de Axlou Toth	**SÉRIE D'EXERCICES N°2** **Polynômes : Approfondissement et Synthèse**	**Niveau** : 1S1/C **Professeur** : M. Diallo

SAF SAP 1 :

Soit P un polynôme de degré $\mathbf{n}, \mathbf{n} \geq \mathbf{1}$.

1) Montrer que si P a n racines distinctes $a_1, \dots, a_n$ alors il existe un polynôme Q tel que $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}$, on ait : $\mathbf{P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) Q(x)}$
2) En déduire que tout polynôme de degré n a au plus n racines distinctes.
3) Existe-t-il un polynôme P non nul tel que $\forall\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x^5 P\left(\sqrt{x^2+1}\right) = P(x-1)}$ et tel que 1 soit racine de P ?

SAF SAP 2 :

Soit m et n deux entiers naturels non nuls et soit P le polynôme défini par :

$$\mathbf{P(x) = x^{2m} + (x+1)^n - 1}$$

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de $P(x)$par $\mathbf{x^2 + x}$. Dans toute la suite on désigne par $\mathbf{A(x)}$ un polynôme de $\mathbf{d° \geq 1}$
2) On pose $\mathbf{B(x) = [A(x)]^{2m} + [A(x) + 1]^n - 1}$
   a) Montrer que $B(x)$ est divisible $\mathbf{[A(x)]^2 + A(x)}$
   b) Montrer si x_0 est une racine de $\mathbf{A(x)}$ alors $\mathbf{x_0}$ est aussi une racine de $\mathbf{B(x)}$
3) On pose $\mathbf{A(x) = x^2 - 3x + 2}$; m=1 et n=2
   a) Ecrire en produit de facteurs irréductibles de $\mathbf{B(x)}$
   b) Résoudre alors $\mathbf{B(x) \geq 0}$.

SAF SAP 3 :

Définition : Soit a et b deux entiers relatifs, non nuls. On dit que b est un diviseur de a, ou que a est un multiple de b, s'il existe k $\in\mathbb{Z}$ tel que $a = kb$. On dit aussi que b divise a et on note b|a.

Exemple : -2|14 car 14=-2(-7) ;3|-12 car -12=3(4)

I) Soit $\mathbf{H(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}$ un polynôme normalisé de degré $n \geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$
   1) Démontrer que si $H(x)$ admet une racine dans $\mathbb{Z}$ alors celle-ci divise a_0
   2) Les polynômes $\mathbf{A(x) = x^3 - x^2 - 109x - 11}$ **et** $\mathbf{B(x) = x^{10} + x^5 + 1}$ ont-ils des racines dans $\mathbb{Z}$
II) Soit $\mathbf{P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0}$ un polynôme à coefficients entiers de degré 3 tel que $\mathbf{a_3 \neq 0}$ **et** $\mathbf{a_0 \neq 0}$.

On suppose que $\mathbf{P(x)}$ admet une racine rationnelle $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}}$ écrite sous forme irréductible (p et q sont premiers entre eux).

1) Montrer que p divise a_0 et q divise a_3.
2) **Application :**
   a) Factoriser le polynôme $\mathbf{P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x + 5}$ dans $\mathbb{Q}$ puis dans $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que le polynôme $\mathbf{x^3 + 3x - 1}$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{Q}$.

SAF SAP 4 : Concours Général Sénégalais 2006

P est un polynôme non nul de degré n, défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathbf{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

Soit Q le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $\mathbf{Q(x) = P(x)P(x+2) + P(x^2)}$

1) Montrer si $\mathrm{a_n} \neq -1$ alors $\mathrm{Q(x)}$ est de degré $2\mathrm{n}$.
2) On suppose dans la suite que $\mathrm{p(x)}$ vérifie la propriété
   $\mathbf{(R): P(x)P(x+2) + P(x^2) = 0} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

On se propose de montrer que si $\mathrm{p(x)}$ admet une racine a alors $\mathbf{a = 1}$. On suppose que $\mathbf{p(x)}$ admet une racine a c'est-à-dire $\mathbf{p(a) = 0}$.

a) Montrer que $\mathbf{a^2}, \mathbf{a^4}$ sont des racines de $\mathbf{p(x)}$. En déduire que $\mathbf{a^{2k}}$, où $k \in \mathbb{N}$ est une racine de $\mathbf{p(x)}$
b) Déduire de ce qui précédé si $\mathbf{|a| \neq 1}$ alors $\mathrm{p(x)}$ à une infinité de racines
c) En déduire que $\mathbf{|a| = 1}$
d) Montrer $\mathbf{(a-2)^2}$ est une racine de $\mathbf{p(x)}$
e) Déduire de d) et c) que $\mathbf{a = 1}$.

SAF SAP 5 : Concours Général Sénégalais 2008

Pour tout P on considère le polynôme $\mathbf{\Delta P}$, défini pour tout x par $\mathbf{\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)}$

1) Calculer $\Delta\mathrm{P(x)}$ dans chacun des cas suivants :
   a) $\mathbf{P(x) = 2x + 1}$, b) $\mathbf{P(x) = x^2 - 4x + 6}$ et c) $\mathbf{P(x) = x^3}$
2) Vérifier que si P et Q sont deux polynômes, $\boldsymbol{\lambda}$ **et** $\boldsymbol{\mu}$ deux réels alors
$$\mathbf{\Delta(\lambda P + \mu Q) = \lambda \Delta P + \mu \Delta Q}$$

3) Montrer si P est un polynôme de degré $\mathbf{n}$ $\mathbf{(n \geq 1)}$ alors $\mathbf{\Delta P}$ est de degré $\mathbf{n - 1}$

Montrer que la réciproque est vraie

4) On note $\mathbf{P_0}$ **et** $\mathbf{P_1}$ les polynômes respectifs définis par $\mathbf{P_0(x) = 1}$ **et** $\mathbf{P_1(x) = x - 1}$
   a) Vérifier que $\mathbf{\Delta P_1 = P_0}$
   b) On admet qu'il existe un unique polynôme noté $\mathrm{P_2}$ tel que $\mathbf{P_2(1) = 0}$ et $\mathbf{\Delta P_2 = P_1}$

Déterminer $\mathbf{P_2(x)}$.

Application :

Soit n un entier naturel non nul. En écrivant l'égalité $\mathbf{\Delta P_2(k) = P_1(k)}$ pour

$\mathbf{k \in \{1, 2, \dots, n+1\}}$

Montrer la formule suivante : $\mathbf{1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$

5) On pose $\Delta^2 P = \Delta(\Delta P)$

   a) Montrer que pour tout polynôme P de degré 2, on a $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P(x) = P(1) + \Delta P(1).(x-1) + \frac{\Delta^2 P(1)}{2}(x-1)(x-2)}$$

   b) Trouver alors un polynôme P de degré 2 tel que $\mathbf{P(1) = -1, P(2) = 9\ et\ P(3) = 21.}$

SAF SAP 6 : Théorème de Kakeya-enestrom

On note (E) l'équation : $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_n = 0$, avec $a_0 \neq 0 \quad et \quad a_n \neq 0$.

On désigne par M le plus grand des nombres $\left|\frac{a_1}{a_0}\right|; \left|\frac{a_2}{a_0}\right|; \ldots; \left|\frac{a_n}{a_0}\right|$

Le but du problème est de démontrer que toutes les solutions de (E) si elles existent, sont dans l'intervalle $]-1-M; 1+M[$.

1) Démontez que (E) a les mêmes solutions que l'équation :

$$\frac{a_1}{a_0x} + \frac{a_2}{a_0x^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0x^n} = -1 \ (E')$$

2) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \frac{a_1}{a_0x} + \frac{a_2}{a_0x^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0x^n}$

   a) Démontrer que $|g(x)| \leq M\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|^2} + \cdots + \frac{1}{|x|^n}\right)$

   b) Montrer que pour tout $|x| \geq 1+M \quad |g(x)| \leq M\left(\frac{1}{1+M} + \frac{1}{(1+M)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+M)^n}\right)$

En déduire que $\forall\ |x| \geq 1+M\ on\ a |g(x)| < 1$

On pourra utiliser la relation $\forall\ q \neq 1, n \in \mathbb{N}^*, q + q^2 + \cdots + q^n = q\frac{(1-q^n)}{1-q}$

   c) Démontrer que si $|x| \geq 1+M$ alors x n'est pas solution de (E).

Déduisez-en que les solutions de (E) sont dans l'intervalle $]-1-M; 1+M[$.

3) **Application** :

   a) Montrer que l'équation $8x^5 + 4x^4 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$, a au moins une solution.

   b) Montrer que toutes ses solutions sont dans $]-1.625; 1.625[$.

SAF SAP 7 : Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit n un entier naturel ou égal à $1, a_1, a_2, \ldots, a_n$ n nombres réels $b_1, b_2, \ldots, b_n$ n autres nombres réels. On se propose de démontrer le résultat suivant :

« Il existe un unique polynôme P vérifiant les conditions suivantes :

a) $\mathbf{deg(P) \leq n-1}$; **b)** $\mathbf{P(a_1) = b_1, P(a_2) = b_2, \ldots, P(a_n) = b_n}$. **»**

Ce résultat s'appelle **théorème de Lagrange**

1) On suppose qu'il existe deux polynômes $P\ et\ Q$ vérifiant les conditions $a)\ et\ b)$.
   Démontrer que $P - Q = 0$.

2) Conclure sur l'unicité de $\boldsymbol{P}$.

3) Pour tout entier $\boldsymbol{i}$ tel que $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n}$, on pose :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{1\leq j\leq n \\ j\neq i}} \frac{x-a_j}{a_i-a_j} = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\ldots\ldots(x-a_n)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n)}$$

a) Vérifier que pour tout $\boldsymbol{i}$ tel que $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n}-\mathbf{1}$, $\boldsymbol{L_i}$ est un polynôme de degré $\boldsymbol{n}-\mathbf{1}$.
Les polynômes $\boldsymbol{L_i}$ sont appelés **polynômes interpolateurs de Lagrange**

b) Vérifier que pour tout $\boldsymbol{i}$ tel que $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n}-\mathbf{1}$, on a :

$$L_i(a_1) = L_i(a_2) = \cdots = L_i(a_{i-1}) = L_i(a_{i+1}) = \cdots = L_i(a_n) = 0 \text{ et } L_i(a_i) = 1$$

c) Démontrer que

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(x) = b_1L_1(x) + b_2L_2(x) + \cdots + b_nL_n(x)$$

est un polynôme qui vérifie les conditions a) et b) du **théorème de Lagrange**

4) Enoncer une conclusion.

Application 1 :

Déterminer un polynôme de degré 2 tel que $P(-1) = 1, P(0) = -1 \text{ et } P(1) = -1$

Ce polynôme est-il unique ?

Application 2 :

Trouver un polynôme P de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$P(0) = 1, P(1) = 0, P(-1) = -2 \text{ et } P(2) = 4$$

Application 3 :

Déterminer tous les polynômes P tel que $P(-1) = 1, P(0) = -1 \text{ et } P(1) = -1$

SAF SAP 8 : Concours Junior Polytech 2011

Soient x, y et z trois réels positifs tel que $xyz > 1$, on veut montrer que

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{y^5-y^2}{y^5+x^2+z^2} + \frac{z^5-z^2}{z^5+y^2+x^2} \geq 0 \ (E)$$

1) Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des réels. Démontrer l'inégalité de **Cauchy-Schwarz.**

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$$

Indication : Utiliser le trinôme $\quad \varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} (ta_k + b_k)^2$

2) Montrer que (E) est équivalent a $\frac{}{x^5+y^2+z^2} + \frac{}{y^5+x^2+z^2} + \frac{1}{z^5+y^2+x^2} \leq \frac{3}{x^2+y^2+z^2}$

3) En utilisant l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**, démontrer que :

$$(x^5+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x}+y^2+z^2\right) \geq (x^2+y^2+z^2)^2$$

4) Montrer finalement que $\frac{1}{x^5+y^2+z^2} \leq \frac{3(y^2+z^2)}{2(x^2+y^2+z^2)^2}$. En déduire (E).

Pensée :

« Soyez un élément de qualité. Certaines personnes ne sont pas habituées à un environnement où l'on attend l'Excellence » Steve Jobs