Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2015-2016 **Lycée :** Lycée de Sangalkam	**SÉRIE D'EXERCICES** **Produit Scalaire**	**Niveau** : 2^{nde} S **Professeur** : M. SANE

Exercice 1 :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteur tels que $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = 5$ .Calculer :

$\|\vec{u}\|^2$; $\|\vec{v}\|^2$; $(\vec{u}-\vec{v})^2$; $(\vec{v}-\vec{u})^2$; $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})$; $\|\vec{u}+\vec{v}\|$; $\|2\vec{u}-5\vec{v}\|$; $\|\vec{u}+3\vec{v}\|$

$(-\vec{u}+2\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$; $(\vec{u}+3\vec{v}).(\vec{u}-3\vec{v})$

Exercice 2 :

Soit un triangle équilatéral de côté a ; soient A',B' et C' les milieux respectifs des coté [BC] , [AC] et [AB]. On note G le centre de gravité du triangle ABC.

En utilisant les la définition du produit scalaire par les mesures algébriques, calcule en fonction de a :

$a)$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ $c)$ $\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{AC}$ $e)$ $\overrightarrow{GB'}.\overrightarrow{GB}$ $g)$ $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$

$b)$ $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ $d)$ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ $f)$ $\overrightarrow{AG}..\overrightarrow{AA'}$ $h)$ $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AC}$

Exercice 3 :

Soit ABCD un trapèze rectangle en A et D : $AB = 5$, $AD = 4$ et $CD = 8$.

Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC}$.

Exercice 4 :

Le segment $[AB]$ a pour longueur a. Montrer que, pour tout point M de la médiatrice du segment $[AB]$, on a :$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MB} = \frac{a^2}{2}$

Exercice 5 :

On donne les points suivants : $A(3;2)$, $B(0;5)$ et $C(-2;-1)$

a) Calculer les normes des vecteurs : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$
b) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$
c) Calculer les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$. (on donnera des valeurs approchées)
d) H est le projeté orthogonal de B sur (AC). Calculer AH et CH.

Exercice 6 :

Soit ABC un triangle équilatéral de côté m.

1) I est le barycentre de $(B,4)$ et $(A,1)$, et J le barycentre de $(C,2)$ et $(A,3)$.
a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de m.
b) Prouver que la droite (IJ) est orthogonale à la droite (AC).
2) Soit a, b et c trois réels. On désigne par K le barycentre de (A,a) et (B,b), et par L celui de $(A, a+b-c)$ et (C,c).
3) Montrer que les droites (KL) et (AC) sont orthogonales si, et seulement, $b = 2c$.

Exercice 7 :

le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) (C) est le cercle de centre ω et de rayon R.
Après avoir vérifié que A appartient à (C), déterminer une équation de la tangente en A au cercle (C).

$a)$ $\omega(2;-1)$, $R = 5$ et $A(5;3)$

$b)$ $\omega(4;1)$, $R = \sqrt{5}$ et $A(5;3)$

2) $A(-2;-1)$, $B(-4;3)$ et $C(-3;6)$. Donner une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC en précisant son centre et son rayon.
3) Soit (E) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que : $x^2+y^2+2x+4y+1=0$ et (F) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que : $x^2+y^2-6x+10=0$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chaque ensemble. Pour le cas éventuel d'un cercle déterminer les extrémités A et B du diamètre passant par O.

Exercice 8 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer la distance du point A à la droite (D) dans les cas suivants.

a) $(D): y=-3x+4$ $\quad et \quad A(3,-1)$; **b)** $(D): \begin{cases} x=-2+3t \\ y=1-4t \end{cases}$ $\quad et \quad A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

2) m étant un paramètre réel et soit $(D_m): mx-(2m+1)y+m-3=0$

a) Calculer la distance $d(m)$ du point A(1,1) à (D_m) ;

b) Déterminer (D_m) sachant que $d(m) = 1$.

3) Soit A (1 ; 0), B (1+ $\sqrt{3}$; 1) et C (3 ; $2\sqrt{3}$) trois points du plan. Calculer la distance AC et la mesure de l'angle $\hat{B}$ en radians. Déterminer l'aire du triangle ABC.

Exercice 9 :

1) Soit I le milieu de $[AB]$ et M un point quelconque. Exprimer $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MI}$ et de $\overrightarrow{IA}$. En déduire que : $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$
2) Dans le triangle MAB, on a : $AB = 6$; $MA = 5$ et $MB = 3$. H est le projeté de M sur (AB) et I le milieu de $[AB]$.

- Calculer $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB}$.
- En déduire IH.

Exercice 10 :

Soit ABC un triangle non aplati d'orthocentre H, de centre de gravité G et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. On désigne par I le milieu de $[BC]$ et J celui de $[AC]$.

1) Soit le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.
   a) Montrer que $\vec{u} = \overrightarrow{AH} - 2\overrightarrow{OI}$ puis en déduire que $\vec{u}.\overrightarrow{BC} = 0$. Etablir que $\vec{u}.\overrightarrow{AC} = 0$.
   b) En déduire que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
   c) Montrer que les points O, H et G sont alignés (*la droite contenant ces trois points est appelé droite d'Euler*).

Exercice 11 : (Théorème *de la médiane)*

1) Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. Montrer que $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$.
2) Les côtés d'un triangle ont pour mesures 5cm, 7cm et 8cm. Calculer la mesure de chacune des médianes.
3) Les médianes d'un triangle ont pour mesures 60mm, 7 mm et 90mm. Calculer la mesure de chacun des côtés.
4) Calculer la somme des carrés des côtés d'un triangle en fonction celle des médianes

Exercice 12 :

On donne un triangle ABC. On désigne les angles par $\hat{A}, \hat{B}$ et $\hat{C}$ et les longueurs des côtés respectivement opposés à aux sommets A, B et C par *a*, *b* et *c*.

1) Démontrer que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = BC^2$.
2) En déduire que : $a = b\cos\hat{C} + c\cos\hat{B}$, puis deux autres formules analogues.
3) Démontrer que $\sin\hat{A} = \sin\hat{B}\cos\hat{C} + \sin\hat{C}\cos\hat{B}$.
4) En déduire que : $\sin(\hat{B} + \hat{C}) = \sin\hat{B}\cos\hat{C} + \sin\hat{C}\cos\hat{B}$.