Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2018-2019 **Lycée :** Cours d'Excellence d'Encadrement Scientifique de Axlou Toth	**Devoir N° du Premier Semestre**	**Niveau** : 1S1/C **Professeurs** : M. Diallo & M. Sarr

Exercice 1 :

1) On considère les fonctions f et g définies par :
$$f(x) = x + |x| \text{ et } g(x) = x - |x|$$
   a) f et g sont-elles des fonctions polynômes ?
   b) Déterminer la fonction produit fg.
2) On considère deux fonctions polynômes P et Q telles que, pour tout $x, P(x)Q(x) = 0$ (le polynôme $P(x)Q(x)$ est le polynôme nul.)
   Soit $d°P = n$ et $d°Q = p$.
   Prouver que P admet au moins $n+1$ racines, ou que $Q(x)$ admet au moins $p+1$ racines. En déduire que $P(x) = 0$ ou $Q(x) = 0$.
3) Quelle propriété non vérifiée par l'ensemble des fonctions est vérifiée par l'ensemble des fonctions polynômes ?

Exercice 2 :

Dans le plan euclidien $\wp$, on considère trois points non alignés A, B et C.

Soit f l'application de $\wp$ dans $\mathbb{R}$, qui à tout point M du plan, associe le réel :

$$f(M) = MA + MB + MC$$

On se propose de démontrer que f atteint un minimum qui est atteint en un seul point.

(C'est-à-dire qu'il existe un unique point T tel que $f(T) \leq f(M)$ pour tout point M de $\wp$).

Soient M et N deux points distincts du plan et I milieu de $[MN]$

1) a) Montrer que pour tout point P du plan distinct de M et N, on a :
$$4IP^2 = MP^2 + NP^2 + 2MP \times NP \cos(\widehat{MPN})$$
   b) En déduire que pour tout point $\wp$ du plan
$$IP \leq \frac{1}{2}(MP + NP)$$
   A quelle condition a-t-on l'égalité ?
   c) Montrer que : $f(I) < \frac{1}{2}\big(f(M) + f(N)\big)$

2) *En déduire que si* f *admet un minimum alors il est atteint en seul point.*

Exercice 3 :

ABC *est un triangle,* α, β *et* γ *trois réels non nuls de même signe et* G *le barycentre de* $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$

Démontrer que :

$$\frac{aire(GBC)}{\alpha}=\frac{aire(GCA)}{\beta}=\frac{aire(GAB)}{\gamma}$$

Exercice 4 :

Soit f *une application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant :*

$$\begin{cases}(i)\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)+f(y)\\(ii)\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(xy)=f(x)f(y)\end{cases}$$

On suppose de plus que f *n'est pas l'application nulle*

1. *Calculer* $f(0)$ *et* $f(1)$.
2. *a. Montrer que* f *est impaire*

   b. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{Z}, f(n)=n$.
3. *Soit* $n\in\mathbb{Z}$. *Exprimer* $f\left(\frac{1}{n}\right)$ *en fonction de* $f(n)$
4. *Montrer que pour tout* $x\in\mathbb{Q}, f(x)=x$
5. *On suppose qu'il existe* $a\neq 0$ *tel que* $f(a)=0$. *Montrer que* $\forall\, x\in\mathbb{R}, f(x)=0$. *En déduire* $\forall a\in\mathbb{R}$,

$$f(a)=0\ \Rightarrow a=0$$

6. *Montrer que* f *est injective*
7. *Montrer que :* $\forall\, x\in\mathbb{R}, x>0 \Rightarrow f(x)>0$
8. *En déduire que* f *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

Pensée : *« Les mathématiques sont l'étonnante alchimie par laquelle les nombres se combinent aux lettres pour rendre clair l'obscure. »*