Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2018-2019 **Lycée :** Cours d'Excellence d'Encadrement Scientifique de Axlou Toth	**Devoir N° du Premier Semestre**	**Niveau** : 1S1/C **Professeurs** : M. Diallo & M. Sarr

Exercice 1 :

On note (E) l'équation : $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n = 0$, avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$.

On désigne par M le plus grand des nombres $\left|\frac{a_1}{a_0}\right|$; $\left|\frac{a_2}{a_0}\right|$;……..; $\left|\frac{a_n}{a_0}\right|$.

Le but du problème est de démontrer que toutes les solutions de (E) si elles existent, sont dans l'intervalle

] –1 –M ; 1 + M [.

1) *Démontez que (E) a les mêmes solutions que l'équation :*

$$\frac{a_1}{a_0 x} + \frac{a_2}{a_0 x^2} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{a_0 x^n} = -1 \qquad (E')$$

2) *g est la fonction définie sur IR* par :* $g(x) = \frac{a_1}{a_0 x} + \frac{a_2}{a_0 x^2} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{a_0 x^n}$.

   a) *Démontrer que* $|\, g(x) \,| \leq M\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{|x|^n}\right)$.

   b) *Montrer que pour tout* $|x| \geq 1 + M$:

   $$|\, g(x) \,| \leq M\left(\frac{1}{1+M} + \frac{1}{(1+M)^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(1+M^n)}\right).$$

   En déduire que $\forall\ x \geq 1 + M,\ |\, g(x) \,| < 1$.

   c) *Démontrer que si* $|x| \geq 1 + M$, *alors x n'est pas solution de (E).*

   Déduisez –en que les solutions de (E) sont dans l'intervalle] –1 –M ; 1 + M [.

3) ***Application*** :

   a) *Montrer que l'équation* $8x^5 + 4x^4 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$, *a au moins une solution.*

b) *Montrer que toutes ses solutions sont dans* $]-1{,}625;\ 1{,}625[$.

Exercice 2 :

Soient $f(x)=\frac{x}{|x|+1}$ *et* $g(x)=\sqrt{x-E(x)}$ *où E(x) désigne la partie entière de x.*

1) *Déterminer les ensembles de définition de f et de g .*

2) a) *Démontrer que* $\forall x \in IR$ *on* $a: x-|x|-1 \leq 0$ *et que* $x-|x|-1 \geq 0$ *puis en déduire que f est bornée sur IR.*

b) *Montrer que g est bornée sur IR.*

3) a) *Montrer que f est bijective de IR sur* $]-1;1[$ *et déterminer* f^{-1}.

b) *g est- elle bijective de IR sur* $[0;1]$ *?*

Exercice 3 :

ABC est un triangle non isocèle, D_a la bissectrice de l'angle $\hat{A}$; Δ_a la bissectrice extérieure de l'angle $\hat{A}$ ($\Delta_a \perp D_a$).

Soit I_a le point d'intersection de D_a et (BC) , J_a le point d'intersection de Δ_a et (BC) ; A' le pied de la hauteur issue de A ; H_b et H_c sont les projetés orthogonaux de I_a sur $[AC]$ et $[AB]$ respectivement .

On pose $BC=a$, $AB=c$, $AC=b$

1) Exprimer de deux manières différentes les aires des triangles ABI_a et ACI_a. Montrer que I_aB et I_aC sont respectivement proportionnelles à c et b .
   a) En déduire que I_a est barycentre de $\{(B;b),(C;c)\}$
   b) Montrer de la même manière que J_a est barycentre de $\{(B;b),(C;-c)\}$

2) Soit C_a l'ensemble des points M du plan tel que $\frac{MA}{MC}=\frac{c}{b}$

a) Montrer que C_a est le cercle de diamètre $[I_aJ_a]$ et qui passe par A .

b) On note Ω_a le centre du cercle C_a . Montrer que Ω_a est le barycentre de $\{(B;b^2);(C;-c^2)\}$

3) Soit C_b l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MC}{MA}=\frac{a}{c}$ de centre Ω_b et C_c l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB}=\frac{b}{a}$ de centre Ω_c .

a) Pour tout point M du plan, $\vec{V}(M)=(b^2-c^2)\overrightarrow{M\Omega_a}+(c^2-a^2)\overrightarrow{M\Omega_b}+(a^2-b^2)\overrightarrow{M\Omega_c}$

Exprimer $\vec{V}(M)$ à l'aide de $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ et montrer que $\vec{V}(M)$ est le vecteur nul.

b) En déduire que Ω_a , Ω_b , Ω_c sont alignés

c) Faites une figure.

Pensée : « *Les mathématiques sont l'étonnante alchimie par laquelle les nombres se combinent aux lettres pour rendre clair l'obscure.* »

Pour mieux préparer les Grands Concours Axlou Toth pour l'innovation a confectionné un Excellent Fascicule « Exercices de Fitness Pro en Mathématiques ».

Pour maximiser vos chances n'hésitez pas à faire vos commandes aux 78 192 84 64-78 151 34 44