Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2018-2019 Lycée : Cours d'Excellence d'Encadrement Scientifique de Axlou Toth	Devoir N°5 du Premier Semestre	Niveau : 1S1/C Professeurs : M. Diallo & M. Sarr

Problème 1 :

Partie A : Notion d'application

Soit f l'application de $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ vers $\mathbb{R}$ et g celle de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 1} \text{ et } g(x) = -x - 2.$$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x, où y est un paramètre réel.
2) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, g(x) \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ puis calculer $fog(x)$.
3) f est-elle injective ? Surjective ? Justifier.
4) Montrer que : $h\ ]-1;+\infty[\ \to]-\infty;1[$
   $x \mapsto f(x)$

Est une bijection puis déterminer sa bijection réciproque.

Partie B : Fonction définie par une partie entière

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 + E\left[\frac{1}{1-E(x^2)}\right]$

1) Montrer que f est définie sur $]-\infty, -\sqrt{2}] \cup]-1,1[\cup [\sqrt{2}, +\infty[$ et que f est paire.
2) a) Expliciter f sur son ensemble de définition.
   b) Etudier le taux de variation de f sur chaque intervalle.
   c) Tracer (C_f) courbe représentative de f.

Problème 2 : Droite d'Euler et Relation de Stewart

Partie A :

Soit ABC un triangle de centre gravité G, on désigne par A, B et C les milieux respectifs des segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$ et par O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Soit H un point du plan.

1) Montrer que : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$
2) Dans la suite, le point H désigne l'orthocentre du triangle ABC.

a) *Déduire de la question précédente que* $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ *est orthogonale à* $\overrightarrow{BC}$.

b) *Démontrer que* $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}$ *est orthogonal à* $\overrightarrow{AC}$.

c) *En déduire que les points* O, G et H *sont alignés.*

Lorsque les points O, G et H *ne sont pas confondus, la droite qu'ils définissent s'appelle* **la droite d'Euler** *du triangle* ABC.

Partie B :

Soit A, B, C *trois points alignés. L'on se propose de démontrer* la relation *suivante dite de* **Stewart** :

$$\overline{BC}.MA^2 + \overline{CA}.MB^2 + \overline{AB}.MC^2 + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0$$

1) *Justifier que* $\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB} = 0$
2) *On définit les fonctions scalaire et vectorielle d'ordre 3 de* **Leibniz** *suivantes :*

$$g(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2, \overrightarrow{f(M)} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC}$$

Soient M et P *deux points du plan, montrer que :*

$$g(M) = g(P) + \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{f(P)} + (\alpha + \beta + \gamma)MP^2$$

3) *Montrer que pour tout point M du plan :*

$$g(M) = g(A) + 2\overrightarrow{MA}.\vec{V} \text{ avec } \vec{V} = \overline{CA}.\overrightarrow{AB} + \overline{AB}.\overrightarrow{AC}$$

4) *Montrer que* $\vec{V} = \vec{0}$ *et en déduire que pour tout point* M *du plan*

$$g(M) = g(A) = \overline{CA}.AB^2 + \overline{AB}.AC^2$$

5) *Justifier que* $g(M) = \overline{CA}.\overline{AB}.\overline{CB}$ *et en déduire la relation de* **Stewart.**

Partie C :

Soit un triangle ABC et D *le pied de la bissectrice intérieure issue de l'angle* $\hat{A}$.

On pose $AB = c, AC = b, CB = a$ et $AD = d$

1) *Faire une figure*
2) *La parallèle à la droite* (AD) *passant par* C *rencontre* (AB) en E. *Placer E.*

   a) *Justifier que* $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}$

   b) *Montrer que* $AE = AC$ *puis démontrer que :* $\frac{DB}{c} = \frac{DC}{b} = \frac{a}{b+c}$
3) *Appliquer la formule de* **Stewart** *sur les points (alignés)* B, D et C *en prenant* $M = A$
4) *Déduire que* $d^2 = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\hat{A}}{2}$.

Pensée :

« Ne t'inquiète pas si tu as des difficultés en Maths, je peux t'assurer que les miennes sont bien plus importantes ! » **Albert Einstein**