Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2018-2019 **Lycée :** Cours d'Excellence d'Encadrement Scientifique de Axlou Toth	**Devoir N°4 du Premier Semestre**	**Niveau** : 1S1/C **Professeurs** : M. Diallo & M. Sarr

EXERCICE 1 :

_Soient A et B deux points distincts et M un point de la droite (AB)

1. Montrer que si M $\in [AB]$ alors $M = bar\,\{(A, MB); (B, MA)\}$

2. Montrer que si M est extérieur au segment $[AB]$, alors :

$$M = bar\,\{(A, MB); (B, -MA)\} \text{ ou } M = bar\,\{(A, -MB); (B, MA)\}$$

EXERCICE 2 : *Utilité des barycentres dans la démonstration de droites concourantes ou alignement de points*

1. On considère un triangle ABC ; A', B' et C' les milieux des côté et P un point du segment $[AB]$ tel que : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Montrer les droites (AA'), (B'C') et (CP) sont concourantes.

2. Soit ABCD un parallélogramme. On définit les points P et F par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

F est le symétrique du milieu de $[AD]$ par rapport à A.

Montrer que P, F et C sont alignés

EXERCICE 3 :

Soit ABC un triangle.

On pose : $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$

1. Montrer la formule suivante dite **d'Al Kashi**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$

2. En déduire **l'inégalité triangulaire :** $|b - c| < a < |b + c|$

3. Montrer que si G est l'isobarycentre de A, B et C alors on a :

$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$

4. *Démontrer que* $\forall\ M \in \mathcal{P}$ $(\mathit{plan\ du\ triangle\ ABC})$,

$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$

5. *En déduire le point du plan pour lequel la somme* $MA^2+MB^2+MC^2$ *est minimale*

EXERCICE4 :

Soit $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

1.a) *Déterminer Df noté D*

b. *Discuter suivant* y $l'ensemble\ des\ solutions\ de\ l'équation\ f(x)=y\ d'inconnue\ x$

2. Soit $g : D \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x^2-1}$

g *est-elle injective, surjective, bijective ?*

3. Soit $h : A \rightarrow B$

$x \mapsto h(x)=\sqrt{x^2-1}$

Donner A et B deux parties de $\mathbb{R}$ *pour que h soit bijective et donner sa bijection réciproque* h^{-1}.

EXERCICE 5 :

On considère dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *les points* $A(-1,4), B(-3,-2)$ et $C\left(\frac{1}{2},1\right)$

1. *Calculer* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $en\ déduire\ l'angle\widehat{BAC}$

2. *Soit l'ensemble* $\mathcal{D}=\{M(x,y)\in\mathcal{P}\ tel\ que\ \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB}=0\}$

   a. *Montrer que* $\mathcal{D}$ *est une droite dont on déterminera une équation*

   b. *Que représente* $\mathcal{D}$ *pour le triangle ABC ?*

3. *Soit* $\mathcal{C}=\{M(x,y)\in\mathcal{P}\ tel\ que\ \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB}+2+0\}$

   a. *Montrer que* $\mathcal{C}$ *est un cercle dont on déterminera son centre et son rayon*

   b. *Montrer que* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{D}$ *sont tangents*

4. *On désigne par G le barycentre des points pondérés* $A(2)$ *et* $B(-3)$ *et f l'application du plan dans lui-même*

a. *Calculer GA et GB*

b. *Montrer que* $f(M) = 240 - MG^2$

c. *Discuter suivant la valeur du réel k l'ensemble* $\mathfrak{K}_k = \{M \in \mathcal{P}\ tel\ que\ f(M) = k)\}$

Pensée : *« Les Mathématiques peuvent-être définies comme une science dans laquelle on ne sait jamais de quoi on parle, ni si ce qu'on dit est vrai »*

Bertrand Russell