Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2019-2020 **Lycée :** Cours d'Excellence d'Encadrement Scientifique de Axlou Toth	**Devoir N°3 du Premier Semestre**	**Niveau** : 1S2/D **Professeur** : M. Diallo & M. Sarr

Exercice 1 :

1) Soit l'équation $(F): x^4 - 12x^3 + 37x^2 - 12x + 1 = 0$
   a) Vérifier que 0 n'est pas solution de (F)
   b) On pose $P(x) = x^4 - 12x^3 + 37x^2 - 12x + 1 = 0$
   Montrer que $P(x) = x^4 P\left(\frac{1}{x}\right)$
   En déduire que si α est solution de (F) alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi solution de (F).
2) Montrer qu'en posant $X = x + \frac{1}{x}$ l'équation (F) revient à résoudre l'équation $(F'): X^2 + aX + b = 0$

Où a et b sont des réels à déterminer

3) Résoudre (F') puis en déduire les solutions de (F)

Exercice 2 :

Existe-t-il un polynôme $P(x)$ du second degré vérifiant simultanément les conditions suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} P(x) = (x-2)Q(x) \\ P(x) = (x+1)T(x) \\ P(x) = (x-1)R(x) + 5 \end{cases}$$

Où Q, T et R sont trois polynômes ?

Problème :

On appelle **polynôme symétrique** un polynôme dont les coefficients peuvent se lire indifféremment dans un sens comme dans l'autre.

Exemple : $f(x) = 3x^4 + x^3 - x^2 + x + 3$

Nous allons voir des méthodes permettant de résoudre l'équation $f(x) = 0$.

1) **Degré 2 :** Soit $f: x \longmapsto ax^2 + bx + a, a \neq 0$

Résoudre $f(x) = 0$ et dans le cas où f admet deux racines distinctes, les comparer.

2) **Degré 3 :** Soit $f: x \longmapsto ax^3 + bx^2 + bx + a, a \neq 0$

a) Montrer que 0 n'est pas racine de f et que si x_1 est une racine de f, alors $\frac{1}{x_1}$ est aussi racine de f.
b) Trouver une racine évidente de f et en déduire une factorisation de $f(x)$
c) Discuter le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$
d) **Application :**

$f: x \longmapsto 7x^3 - 43x^2 - 43x + 7$

Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et factoriser $f(x)$

3) **Degré 4** : Soit $f: x \longmapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a, a \neq 0$
   a) Montrer que 0 n'est pas racine de f et que si x_1 est une racine de f, alors $\frac{1}{x_1}$ est aussi racine de f.

4) Soit $y = x + \frac{1}{x}$

a) Déterminer l'expression de $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ en fonction de a, b, c, y et y^2
b) Montrer que $f(x) = 0$ revient à résoudre successivement deux équations du second degré
c) Montrer que si $b^2 < 4a(c - 2a), f(x) = 0$ n'a pas de solutions.
d) **Application :**

Résoudre l'équation :

$12x^4 + 11x^3 - 146x^2 + 11x + 12$

Récréation mathématique :

« Si six chats chopent six souris en six secondes .... Chats chopent cent souris en cent secondes »