Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2018-2019 **Lycée :** Cours d'Excellence d'Encadrement Scientifique de Axlou Toth	**Devoir N°3 du Premier Semestre**	**Niveau** : 1S1/C **Professeurs** : M. Diallo & M. Sarr

NB : *Ce sujet est conçu comme soutien aux olympiades.*

Exercice 1 :

Soit P *un polynôme de degré* $n, n \geq 1$.

1) *Montrer que si* P *a* n *racines distinctes* $a_1, \dots, a_n$ *alors il existe un polynôme* Q *tel que* $\forall\, x \in \mathbb{R}$, *on ait :* $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)Q(x)$
2) *En déduire que tout polynôme de degré* n *a au plus* n *racines distinctes.*
3) *Existe-t-il un polynôme* P *non nul tel que* $\forall\, x \neq 0$, $x^5 P\left(\sqrt{x^2+1}\right) = P(x-1)$ *et tel que* 1 *soit racine de* P.

Exercice 2 :

Déterminer un polynôme P *unitaire de degré* 3 *divisible par* $(x-1)$ *et ayant le même reste dans les divisions euclidiennes* $(x-2), (x-3)$ *et* $(x-4)$.

Exercice 3 :

Résoudre en discutant suivant les valeurs de m :

$$\frac{m+1}{m-1}x^2 - 2x - 1 < 0$$

Exercice 4 :

Montrer que $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ *est divisible par* $x + y + z$.

Déterminer le quotient.

Exercice5 :

Les nombres a, b *et* c *n'étant pas nuls, on considère le système suivant :*

$$\begin{cases} x + y = a & (1) \\ x^2 + y^2 = b^2 & (2) \\ x^3 + y^3 = c^3 & (3) \end{cases}$$

1) *Quelle condition doit-il exister entre les nombres* a, b *et* c *pour que le système soit compatible ?*
2) *Cette condition étant satisfaite, résoudre le système.*

Exercice 6 :

On considère l'équation de degré n. $(A_0 \neq 0)$

$$f(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0,$$

Dont on désigne les racines, distinctes ou confondues, par $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Montrer que l'équation $F(X) = 0$, *obtenue en faisant le changement d'inconnue* $x^2 = X$ *dans l'équation* $f(x).f(-x) = 0$, *n'est autre que l'équation qui admet comme racines les carrés des racines de l'équation* $f(x) = 0$.

Application :

Former l'équation en X *qui admet comme racines les carrés de l'équation*

$$f(x) = (m-1)x^2 - 2mx + m + 1 = 0.$$

Exercice 7 :

Soit $P(x) = (2m-1)x^2 - 2(m+4)x + 5m + 2$

Comparer $\alpha = -1$ *et* $\beta = 1$ *aux racines de* $P(x)$.

Exercice 8 : Polynôme réciproque

Soit $P(x)$ *un* ***polynôme réciproque*** *de degré* n, *c'est-à-dire pour tout* x *non nul,* $P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n}P(x)$

1) *Démontrer que si* α *est une racine non nulle de* P, *alors* $\frac{1}{\alpha}$ *est aussi une racine de* P.
2) *Démontrer que si le degré de* P *est impair, alors* -1 *est une racine*
3) *Trouver la formule générale des polynômes réciproques de degré* 1, *de degré* 2.

Exercice 9 :

Soit x *la fraction continue définie par :*

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cdots}}}}, a > 0 \text{ et } b > 0$$

a) *Montrer que* x *est solution de l'équation* $bx^2 - abx - a = 0$.
b) *En déduire une écriture sous forme de fraction continue de* x *dans les cas suivants :*

$$(i): x = 1 + \sqrt{3} \qquad (ii)\ x = \frac{3 + \sqrt{21}}{6}$$

Exercice 10 : ***(Inégalité triangulaire)***

Soit ABC *un triangle. On désigne par* $A', B'\ et\ C'$ *les milieux respectifs de* $[BC], [CA]\ et\ [AB]$

Et par p *le périmètre de ce triangle. Pour tout point* M *intérieur au triangle* ABC *, démontrer que*

a) $MB + MC < AB + AC$ (utiliser le point d'intersection de (BM) et (AC)).

b) $MA + MB + MC < p$ c) $MA + MB + MC > \frac{1}{2}p$

d) $AA' + BB' + CC' > \frac{3}{4}p$ e) $AA' + BB' + CC' < p$

Pensée :

« Ce n'est pas parce que les choses sont difficiles qu'on n'ose pas le faire. C'est parce qu'on n'ose pas les faire qu'elles sont difficiles » ***Henri Gougaud.***