Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2018-2019 **Lycée :** Cours d'Excellence d'Encadrement Scientifique de Axlou Toth	**Devoir N°2 du Premier Semestre**	**Niveau** : 1S1/C **Professeurs**: M. Diallo & M. Sarr

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{N}^3$

$$(E : \begin{cases} (a+b)(a+b+c) = 90 \\ (b+c)(a+b+c) = 150 \\ (c+a)(a+b+c) = 210 \end{cases}$$

Exercice 2 :

Soit $f_p(x)$ le polynôme de degré $p+1$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$f_p(x) - f_p(x-1) = x^p \text{ et } f_p(0) = 0.$$

Soit S_p la somme définie par : $S_p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$.

1) Prouver que $f_p(x)$ est divisible par $(x^2 + x)$
2) Déterminer le polynôme $f_p(x)$ pour $p \in \{1,2,3\}$.
3) En déduire la somme S_p en fonction de n pour $p \in \{1,2,3\}$.

Exercice 3 :

On se propose dans cet exercice de résoudre l'équation

$$(E) : x^4 - 2x^2 + 6x - \frac{3}{4} = 0$$

On pose $P(x) = x^4 - 2x^2 + 6x - \frac{5}{4}$. L'idée est d'écrire $P(x)$ sous la forme

$P(x) = Q(x) + R(x)$ avec $Q(x) = (x^2 + m)^2$ et $R(x) = ax^2 + bx + c = a(x + x_0)$ où m, a, b, c et x_0 sont des réels à déterminer.

1) a) Montrer que $P(x) = Q(x) + R(x)$ si et seulement si

$$a = -2 - 2m;\ b = 6 \text{ et } c = -\frac{5}{4} - m^2$$

b) Ecrire alors R(x)en fonction de m.

2) a) Pour quelles valeurs de m, R est—il du second degré ?
b) Calculer dans ce cas son discriminant réduit Δ en fonction de m.
c) Montrer que Δ= 0 si et seulement si $m = 1$ puis établir dans ce cas que

$R(x) = -4\left(x - \frac{3}{4}\right)^2$ et que $Q(x) = (x^2 + 1)^2$.

d) En déduire une factorisation de $P(x)$ puis une résolution de l'équation (E).

Exercice 4 :

ABC est un triangle. On pose $BC = a; AC = b; AB = c;\ \alpha = a\cos\widehat{B}\cos\widehat{C}$;

$\beta = b\cos\widehat{A}\cos\widehat{C}$ et $\gamma = c\cos\widehat{A}\cos\widehat{B}$. On admettra que : $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

A) 1) Soit H le barycentre des points (A, α), (B, β) et (C, γ). Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. En déduire que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.
2) Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

B) Soit G le centre de gravité du triangle ABC. O le centre de son cercle circonscrit et H le point tel que : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

1) Vérifier que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux. Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.
2) Démontrer que O est le barycentre de $\{(G, 3), (H, -1)\}$.
3) On reprend dans cette question les données et les résultats établis dans la **partie A)**
   a) Vérifier que : $\beta + \gamma = a\cos\widehat{A}$.
   b) Déduire que O est le barycentre de

$$\{(A, a\cos\widehat{A}), (B, b\cos\widehat{B}), (C, \cos\widehat{C})\}$$

Exercice 5 :

Soit ABC un triangle équilatéral de coté m

1) I est le barycentre de $(B, 4)$ et $(A, 1)$ et J le barycentre de $(C, 2)$et $(A, 3)$.
   a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de m.
   b) Prouver que la droite (IJ) est orthogonale à la droite (AC).
2) Soit a, b et c trois réels. On désigne par K le barycentre de (A, a) et (B, b) et par L celui de $(A, a + b - c)$et (C, c). Montrer que (KL) et (AC) sont orthogonales si et seulement si $b = 2c$.

Pensée :

« Les Mathématiques si on les regarde possèdent non seulement la vérité mais aussi une extrême beauté »