



# Axlou Toth pour l'Innovation



Année Scolaire : 2018-2019  
Lycée : Ndongol (Diourbel)

## DEVOIR N°1 DE MATHS (2<sup>nd</sup> Semestre)

Niveau : TS2  
Professeur : M. AMAR FALL

### EXERCICE 1 : (4 pts)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points A ; B et C d'affixes respectives  $-1$ ;  $3 - 2i$  et  $1 + 4i$ .

1. Placer les points A, B et C. **(0,75 pt)**
2. Déterminer le module et un argument de  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ . **(0,25+0,5 pt)**
3. En déduire la nature du triangle ABC. (Justifier votre réponse). **(0,5 pt)**
4. Soit S la similitude directe de centre A et qui transforme B en C
  - a. Déterminer l'écriture complexe de S. **(0,75 pt)**
  - b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de S. **(0,75 pt)**
  - c. Déterminer l'image par S du triangle ABC. **(0,5 pt)**

### EXERCICE 2 : (5 pts) Les questions 1) et 2) sont indépendantes.

1. Soit f la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x(x-1)}$ .
  - a. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$ ,  $f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-1}$ . **0,5pt**
  - b. En déduire la primitive F sur  $]1; +\infty[$  de f, qui prend la valeur  $1 - \ln 2$  en 2. **(0,5 pt)**
2. On considère sur  $]0; +\infty[$ , la fonction g telle que  $g(x) = \frac{-2}{1+x^2} + \ln(1 + \frac{1}{x^2})$ .
  - a. Montrer que  $D_g = ]0; +\infty[$ . **(0,5 pt)**
  - b. Dresser le tableau de variation de g. **(1,5 pt)**
  - c. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  et que  $0,5 < \alpha < 0,6$ . **(1 pt)**
  - d. En déduire le signe de g sur  $]0; +\infty[$ . **(1 pt)**

**PROBLEME (11 pts)**

**Partie A :** Soit  $g$  la fonction définie sur  $]-\infty; 0[$  par  $g(x) = 2 \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}$ .

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ . (0,25 + 0,25 pt)
2. Montrer que  $g$  est dérivable sur  $]-\infty; 0[$  et que pour tout  $x \in ]-\infty; 0[$ ,  $g'(x) = \frac{x-2}{x(x-1)^2}$ . (0,25 pt + 0,5 pt)
3. Dresser le tableau de variations de  $g$  sur  $]-\infty; 0[$  puis en déduire le signe de  $g$  sur  $]-\infty; 0[$ . (0,5 pt + 0,25 pt)

**Partie B :** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1.
  - a. Montrer que  $D_f = \mathbb{R}$ . (0,5 pt)
  - b. Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en  $0$  et sur  $\mathbb{R}^*$ . (0,5 pt + 1 pt).
  - c. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ . (1 pt).
2.
  - a. Montrer que sur  $]-\infty; 0[$ ,  $f'(x) = xg(x)$ . En déduire le signe de  $f'(x)$  sur  $]-\infty; 0[$ . (0,5 pt + 0,25 pt).
  - b. Calculer  $f'(x)$  sur  $]0; +\infty[$  puis y étudier son signe. (0,5 pt)
  - c. Dresser le tableau de variations de  $f$ . (0,25 pt)
3. On admet que sur  $]-\infty; 0[$ , on a :  $-x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1-x) \leq -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$  et on pose  $X = \frac{1}{x}$  pour tout  $x \in ]-\infty; 0[$ .
  - a. Montrer que pour tout  $x \in ]-\infty; 0[$ ,  $f(x) + x = \frac{\ln(1-X)+X}{X^2}$ . (0,75 pt)
  - b. En déduire que la droite  $(\Delta): y = -x - \frac{1}{2}$  est une asymptote à  $(C_f)$  en  $-\infty$ . (0,75 pt)
  - c. Tracer  $(C_f)$  dans un repère orthonormé d'unité 2 cm. (1 pt)

**Partie C :** Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = [1; +\infty[$ .

1. Montrer que  $h$  est une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à préciser. (0,5 pt)
2. Soit  $h^{-1}$  sa bijection réciproque.
  - a. Calculer  $h(1)$ .  $h^{-1}$  est-elle dérivable en  $e^{-1}$ ? (0,5 pt)

- b. Montrer que  $h^{-1}$  est dérivable en  $y_0 = 2e^{-2}$  puis calculer  $(h^{-1})'(y_0)$ . (0,5pt)
- c. Construire dans le même repère  $(C_{h^{-1}})$ . (0,5 pt)

**PENSEE**

**Si tu passes tout ton temps à remplir ton ventre alors tu ne seras jamais loin d'un cancer. Si tu ne penses qu'au festin alors il te sera difficile de prendre en main ton destin. Il ne s'agit pas d'être un devin pour savoir que la faim n'est pas seulement du chagrin mais elle est aussi une source de motivation, d'inspiration et de dévotion.**

AXLOU TOTH POUR L'INNOVATION