Axlou Toth pour l'Innovation

DEVOIR WEEK-END N°1

Exercice :

Dans cet exercice les trois questions sont indépendantes

1) Simplifier l'expression suivantes lorsqu'elle existe

$$A = \frac{1}{x(x-y)(y-z)} + \frac{1}{y(y-x)(y-z)} + \frac{1}{z(z-x)(z-y)}$$

2) Démontrer que $||x|-|y|| \leq |x-y|$ quelque soient les réels x et y.
3) Soient a et b deux réels strictement positifs démontrer que si $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{5}$ alors $\left|\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right| = 1.$

Problème :

Partie A :

Soit ABC un triangle on désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$.

Soit G le point tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{O}$.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}$

   b) En déduire que $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GA'}$.
2) Montrer que $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GB'}$ et que $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GC'}$.
3) En déduire que les trois médianes sont concourantes en G. (le point G est appelé **centre de gravité du triangle** ABC).

Partie B :

Dans cette partie, on désigne par O le centre du cercle circonscrit, par G le centre gravité et par H l'orthocentre du triangle ABC.

Soient M le milieu de $[BC]$ et D le symétrique de A par rapport à O.

4) a) Quelle est la nature du quadrilatère $BHCD$.

   b) En déduire que $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{MO}$.
5) Montrer que $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$ et $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.
6) Montrer que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.

7) En déduire que $O, H\ et\ G$ sont alignés. (La droite qui passe par $O, H\ et\ G$ s'appelle la **droite d'Euler du triangle** ABC).

<u>**Pensée :**</u>

« Il n'y a pas de voie royale pour accéder à la géométrie au temple de la géométrie » ***Euclide***