Axlou Toth pour l'Innovation

DEVOIR WEEK-END N°4

Exercice 1 :

1) *Etudier le signe puis calculer les carrés des réels suivants :*
$X = \sqrt{5} - \sqrt{6}$; $Y = \sqrt{5} - \sqrt{2}$; $Z = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

2) *En déduire une écriture simplifier des nombres :*
$A = \sqrt{11 - 2\sqrt{30}}$; $B = \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$; $C = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}}$

3) *Trouver trois réels non nuls tels que :*
$$\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} = 0$$

Exercice 2 :

Le but de l'exercice est de trouver tous les nombres entiers naturels a, b et c *tel que* $a < b < c$ *et* $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

1) *Vérifier que* $a \geq 2$
2) *Etablir l'inégalité :* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{3}{a}$. *En déduire les valeurs possibles pour* a
3) *Montrer que : :* $\frac{1}{c} + \frac{1}{b} < \frac{2}{b}$. *En déduire les valeurs possibles de* b.

Exercice 3 :

A) *Soient* a et b *deux nombres réels strictement positifs tels que :* $a \leq b$.

On appelle ***moyenne arithmétique*** *de* a et b *" le nombre réel* $m(a,b) = \frac{a+b}{2}$ *, le nombre* $g(a,b) = \sqrt{ab}$ *est appelé* ***moyenne géométrique*** *de* a et b *, le nombre* $q(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ *est appelé* ***moyenne quadratique*** *de* a et b *et* $h(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$ *est appelé* ***moyenne harmonique****. "*

1) *Calculer* $m(2,4)$, $g(2,4)$ et $q(2,4)$
2) *Montrer que* $a \leq h(a,b) \leq g(a,b) \leq m(a,b) \leq q(a,b) \leq b$.

3) *Montrer que* $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$
4) *En déduire que pour tous réels* a, b *et* c, *on a :*
$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} \geq \sqrt{2}(a+b+c)$$
5) *Montrer que pour tous réels* a, b *et* c, *on a :*
$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$$
6) *En déduire que pour tous réels* a, b *et* c, *on a :*
$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt{3}}$$

B) *Soient* x, y *et* z *les longueurs des côtés d'un triangle*
1) *Montrer que* $x \geq \sqrt{x+y-z} \times \sqrt{x-y+z}$; $y \geq \sqrt{y+x-z} \times \sqrt{y+z-x}$ *et* $z \geq \sqrt{y+z-x} \times \sqrt{x+z-y}$
2) *Montrer que :* $xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(x+z-y)$
3) *En déduire que :*
$$(x+y)(y+z)(x+z) \geq 8(x+y-z)(y+z-x)(x+z-y)$$

Pensée :

« Les Mathématiques si on les regarde possèdent non seulement la vérité mais aussi une extrême beauté »