Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2018-2019 **Lycée :** Ndondol (Diourbel)	**COMPOSITION DE MATHS** **(2nd Semestre)**	**Niveau** : TS2 **Professeur** :M. AMAR FALL

EXERCICE 1 : (8 pts)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A ; B et C d'affixes respectives $z_A = -3i$; $z_B = \sqrt{3} - i$ et $z_C = \frac{2}{3}(\sqrt{3} + i)$.

1. Calculer le module et un argument de z_A; z_B et z_C . **(1,5 pt)**
2. Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = \frac{z_C}{z_B} = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$. **(0,25+0,5 pt)**
3. Déterminer le réel m tel que le point G d'affixe i soit le barycentre du système $\{(A; m); (B; -2); (C; 3)\}$. **(0,5 pt)**
4. Soit S la similitude directe qui transforme A en B et B en C.
   - **a.** Déterminer l'écriture complexe de S et préciser ses éléments caractéristiques. **(1 pt)**
   - **b.** Déterminer les coordonnées du point D, image de G par S. **(0,25 pt)**
   - **c.** Quelle est l'image de (AB) par S ? **(0,25 pt)**
   - **d.** En déduire une équation cartésienne de l'image de (AB) par S. **(0,25 pt)**
5. On considère la suite des points M_n ; $n \in \mathbb{N}$ définie par $M_0 = O$; $M_n(z_n)$ tel que $z_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + i\sqrt{3})z_n + \sqrt{3} + 2i$
   - **a.** Montrer que M_{n+1}est l'image de M_n par une similitude dont on précisera les éléments caractéristiques. **(0,25 pt)**
   - **b.** On pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$. Montrer que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de 1er terme $d_0 = \sqrt{7}$ **(1 pt)**
   - **c.** Exprimer d_n en fonction de n. **(0,25 pt)**
   - **d.** Exprimer $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n$ en fonction de n puis calculer sa limite. **(1 pt)**
   - **e.** On pose $\theta_n = \arg(z_{n+1} - z_n)$. Montrer que $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison. **(1 pt)**

EXERCICE 2 :(2pts)

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$

1. Résoudre (E) dans $\mathbb{R}$. **(1 pt)**
2. Déterminer la solution g de (E) dont la courbe passe par le point $A\binom{0}{1}$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x + 3$. **(1 pt)**

PROBLEME (10 pts)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x + 1 - \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| & \text{si } x < 0 \\ (1+x)e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1.

- **a.** Justifier que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. **(0,5 pt)**
- **b.** Calculer les limites de f aux bornes de D_f. **(1 pt)**
- **c.** Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue. **(0,5 pt)**

2.

- **a.** Etudier la continuité de f en 0. **(0,5 pt)**
- **b.** Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats. **(1,5 pt)**

3.

- **a.** Etudier les variations de f dans D_f. **(1,5 pt)**
- **b.** Dresser le tableau de variations de f. **(0,75 pt)**

4.

- **a.** Montrer que la droite $(D): y = x + 1$ est une asymptote à C_f en $-\infty$. **(0,5 pt)**
- **b.** Etudier la position de (C_f) par rapport à (D). **(0,75 pt)**

5. Soit h la restriction de f à l'intervalle $I =]-1; 0]$.

- **a.** Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser. **(0,5 pt)**
- **b.** Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-1; 0]$. Vérifier que $-0{,}4 < \alpha < -0{,}3$. **(0,5 pt)**

6. Tracer les asymptotes de C_f puis C_f et enfin la courbe de h^{-1} dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm. On prendra $\alpha = -0{,}4$. **(1,5 pt)**

Bonne dégustation scientifique !