Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2018-2019 **Lycée :** Ndondol (Diourbel)	**SÉRIE D'EXERCICES N°7** **CALCUL INTEGRAL**	**Niveau** : TS2 **Professeur** :M. AMAR FALL

EXERCICE 1 : Calculer chacune des intégrales suivantes au moyen d'une primitive

$\int_0^1 (x^3 - x + 2)\,dx$; $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x}$; $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^3}$; $\int_0^1 e^{3x+1}\,dx$; $\int_0^1 \frac{-x}{\sqrt{3+2x^2}}\,dx$; $\int_{-1}^{1} 3xe^{x^2}\,dx$;

$\int_0^2 \left[(3x-1)\left(\frac{3}{2}x^2 - x\right)^2\right] dx$; $\int_1^3 \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$ et $\int_{-1}^{0} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx$

EXERCICE 2 :

1. Trouver les réels a, b et c tels que : $\frac{2x^2-x+1}{x+2} = ax + b + \frac{c}{x+2}$ puis calculer $\int_0^2 \frac{2x^2-x+1}{x+2}\,dx$
2. Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{x+2}{(x+1)^4} = \frac{a}{(x+1)^3} + \frac{b}{(x+1)^4}$ puis calculer $\int_1^3 \frac{x+2}{(x+1)^4}\,dx$

EXERCICE 3 :

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,dx$

1. En utilisant une primitive, calculer I.
2. Calculer I + J. En déduire la valeur de J.

EXERCICE 4 :

1. En utilisant une intégration par partie, calculer les intégrales suivantes :

   a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$; $\int_1^{e^2} \ln x\,dx$; $\int_1^{e} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$; $\int_{-1}^{0} (2x+1)e^{3x+1}\,dx$ et $\int_2^3 (x+3)\ln x\,dx$

2. **a.** Trouver les réels a et b tels que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$

   b. En utilisant une intégration par partie et la question **a)**, calculer $\int_1^e \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,dx$

3. Montrer que $cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$ puis calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$.
4. Calculer $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x\,dx$

EXERCICE 5 : A l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer $\int_1^e x(1-\ln x)^2 \, dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2x} \cos 2x \, dx$.

1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^x \cos^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^x \sin^2 x \, dx$. Calculer $I + J$ et $I - J$ et en déduire les valeurs de I et J.

EXERCICE 6 : On pose $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \cos x \, dx$ avec n un entier naturel

1. En utilisant deux intégrations par parties successives, exprimer u_n en fonction de n. On rappelle que $\cos k\pi = (-1)^k$ et $\sin k\pi = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera son premier terme u_0.
3. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$
   - **a.** Montrer que $S_n = \int_0^{n\pi} e^{-x} \cos x \, dx$
   - **b.** Calculer S_n en fonction de n puis $\lim_{n \to +\infty} S_n$

EXERCICE 7 :

$$f(x) = \begin{cases} x\ln|x| \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer D_f puis étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Etudier f puis tracer C_f.
3. Calculer en unités d'aires, l'aire du domaine délimité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$ avec $0 < a < 1$.
4. Calculer la limite de cette aire lorsque a tend vers 0.

Pensée :

Un court discours tout court peut changer le cours d'une vie et apporter un secours à une personne à qui la vie a joué un mauvais tour. Tu dois toujours te mettre à jour si tu ne veux pas qu'un seul jour ne pourrisse ton parcours. Ton amour pour le travail et ton humour envers tes semblables décrivent sans détours ton parcours. La vie n'est pas forcément un compte à rebours ni un concours mais tu ne dois pas hésiter à faire demi-tour à chaque fois que tu ne maitrises plus ses contours.