Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2018-2019 **Lycée :** Kébémer (LOUGA)	**SÉRIE D'EXERCICES** **Suites Numériques**	**Niveau** : Terminale S2 **Professeur** : M. KEBE

EXERCICE 1 :

Etudier la monotonie des suites définies ci-dessous.

$(u_n)_{n\geq 1}$ où $u_n = \frac{n^2-2}{n^2+n}$; $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $v_n = \ln(n^2+2n+3)$; $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $w_n = e^{1-n^2}$

EXERCICE 2 :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites définies respectivement par $u_0 = 9$;

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$ et $v_n = u_n + 6$.

1. **a.** Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.

b. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $v_n > 0$.

c. Calculer en fonction de n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ puis $S'_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Déterminer les limites de (S_n) et (S'_n).

2. On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_n = \ln v_n$.

a. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1er terme.

b. Calculer en fonction de n , $S''_n = \sum_{i=0}^{n} w_i$ puis déterminer la limite de (S''_n).

3. Calculer en fonction de n, $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_n$. En déduire la limite de (P_n).

EXERCICE 3 :

1) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$. Montrer que $u_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$.

2) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

b) En déduire que $u_n = \frac{n}{n+1}$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$.

3) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{k}{k+1})$. Montrer que $u_n = \ln(\frac{1}{n+1})$. En déduire la limite de suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

EXERCICE 4 :

On considère les suites numériques (U_n) et (V_n) définies sur IN par : $\begin{cases} U_0 = e^3 \\ U_{n+1} = e\sqrt{U_n} \end{cases}$ et $V_n = \ln(U_n) - 2$.

1) Calculer U_1 et V_1.

2) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3) Exprimer V_n, puis U_n, en fonction de n.

4) Etudier la convergence des suites (U_n) et (V_n).

EXERCICE 5 :

On considère les suites $(u_n)\, et\, (v_n)\, telles\, que \begin{cases} u_1 = 2 \\ v_1 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 4v_n}{6} & n \in IN^* \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 5v_n}{6} & n \in IN^* \end{cases}$

1) Soit $a_n = v_n - u_n$ pour tout entier naturel n non nul

a) Démontrer que (a_n) est une suite géométrique

b) Exprimer a_n en fonction de n

2) **a)** Démontrer que $(u_n)\, croissante\, et\, (v_n)\, dcroissante$

b) Démontrer que $(u_n)\, majoree\, et\, (v_n)\, minoree$

3) **a)** montrer que $v_n \leq u_n$ .Que peut-on dire de (u_n) et (v_n) ?

b) En déduire que $(u_n)\, et\, (v_n)$ ont une limite commune

4) Soit $w_n = \frac{1}{4}u_n + v_n$ pour tout entier n non nul. Montrer que (w_n) est une suite constante. En déduire les limites de $(u_n)\, et\, (v_n)$

EXERCICE 6 :

Soit la suite de terme général u_n défini par : $u_n = \cos\theta \times \cos\frac{\theta}{2} \times ... \times \cos\frac{\theta}{2^n}$ où $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

1) Montrer que $\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{2\sin\theta}$.

2) En déduire $u_n = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$

3) En se servant du résultat précèdent et de $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ montrer que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera

EXERCICE 7 :

1) Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} \end{cases}$

a)Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$; $0 < U_n < 1$

b) Montrer que la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

2) On considère la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ définie par $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$

a) Montrer que la suite $(V_n)_{n\geq 0}$ est géométrique.Préciser sa raison et son premier terme.

b) En déduire la limite de la suite$(V_n)_{n\geq 0}$.

c)Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k = V_0 + V_1 + V_2 \dots\dots\dots\dots\dots.. + V_n$

3)a) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

b) En déduire la limite de U_n

EXERCICE 8 :

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

1)On considère la suite des points M_n ; $n \in \mathbb{N}$ définie par $M_0 = O$; $M_n(z_n)$ tel que $z_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + i\sqrt{3})z_n + \sqrt{3} + 2i$

a)Déterminer les points M_1 et M_2 puis les placer dans le plan complexe.

b)Montrer que M_{n+1}est l'image de M_n par une similitude plane dont on précisera les éléments caractéristiques. c)On pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$. Montrer que $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de 1[er] terme $\mathrm{d}_0 = \sqrt{7}$.

d) Etudier la monotonie et la convergence de $(\mathrm{d}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

f) Exprimer d_n en fonction de n.

g)Exprimer $\mathrm{S}_n = \mathrm{M}_0\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 + \cdots + \mathrm{M}_{n-1}\mathrm{M}_n$ en fonction de n puis calculer la limite de $(\mathrm{S}_n)_{n\geq 1}$.

h)On pose $\theta_n = \arg(z_{n+1} - z_n)$. Montrer que $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

PROBLEME 1 :

On considère f telle que $f(x) = \begin{cases} x\ln(-x) - x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 + \ln(x+1) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1) a) Déterminer D_f puis calculer les limites aux bornes de D_f.

b) Etudier les branches infinies de C_f.

c)Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement les résultats.

d)Dresser le tableau de variations de f.

e)Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-\infty; 0[$ et que $-4 < \alpha < -3$.

f)Déterminer les points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses puis tracer C_f.

2) **a.** Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\beta \in [0; +\infty[$ et que

$1 < \beta < 3$.

b. Montrer que sur $[1; +\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

c.En appliquant l'inégalité des accroissements finis, montrer que $|f(x) - \beta| \leq \frac{1}{2}|x - \beta|$.

3) Soit g la restriction de f à $[0; +\infty[$.On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \text{ si } n \geq 0 \end{cases}$

a. Sans faire de calcul, représenter les 3 premiers termes de la suite sur les axes.

b. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

c. Montrer que pour tout n, $u_n \geq 1$.

d. En déduire que pour tout n, $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{2}|u_n - \beta|$,

e. Montrer que pour tout n, $|u_n - \beta| \leq (\frac{1}{2})^n |u_0 - \beta|$,

f. Montrer que $|u_0 - \beta| \leq 2$. En déduire que $|u_n - \beta| \leq (\frac{1}{2})^{n-1}$ **g.** Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^{n-1}$. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers β.

e. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $\left|u_p - \beta\right| \leq 10^{-1}$. Que représente u_p ?

PROBLEME 2 :

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_n = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$, $\forall$ n ≥ 1

1) Calculer u_1 ; u_2 ; … , u_6 .

2) Construire dans un même repere la droite d'équation y = x et la courbe C de f définie par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$Utiliser ces deux courbes pour représenter les premiers termes de la suite (u_n) .

3) Démontrer que l'équation f(x) = xadmet sur $]0; +\infty[$ une solution l .

4) Démontrer par récurrence que ∀ n entier naturel, $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$

5) Montrer que sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$.

6) A l'aide des trois questions précédentes , et en utilisant le théoreme des inégalités des accroissements finis , montrer que : $|f(u_n) - f(l)| \leq \frac{4}{9} \times |u_n - l|$.

En déduire que : $|u_{n+1} - l| \leq \frac{4}{9} \times |u_n - l|$ puis : $|u_{n+1} - l| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n \times |u_0 - l|$

PROBLEME 3:

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0, +∞[par f(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1 – x.
On appelle C la courbe représentative de f. On se propose d'étudier cette fonction ainsi l'équation f(x) = 0.

1) **a.** Calculer la fonction f' dérivée de f. Dresser le tableau de variation de f' sur [0, +∞[. Indiquer la limite de f' en +∞.En déduire le signe de f' sur [0, +∞[.

b. Dresser le tableau de variation de f sur [0, +∞[. Indiquer la limite de f en +∞

c. Montrer que C admet une asymptote d que l'on déterminera. Construire d et C sur un même graphique.

2) a. justifier que f est bijective de $[0, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser, en déduire que l'équation f(x) =0 admet sur $[0, +\infty[$ une solution et une seule. On note α cette solution.

b.Justifier l'encadrement $1 \leq \alpha \leq 2$.

Partie B

On se propose d'étudier une méthode d'approximation de α .

On observe pour cela que α est l'unique solution de l'équation de l'équation g(x) = x où g est la fonction définie sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$ par $g(x) = xe^{-2x} + e^{-2x} + 1$.

1)Etudier les variations de g sur J. on ne demande pas de construire sa courbe représentative. En déduire que pour tout élément x de J, g(x) appartient encore à J.

2)Montrer que pour tout x de J, on a : $|g'(x)| \leq \frac{3}{e^2}$. En déduire que pour tout x de J, on a :

$|g(x) - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|x - \alpha|$ 2) Soit (u_n) la suite d'éléments de J définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ Pour tout entier n, positif non nul.

a)Montrer que pour tout entier n positif ou nul, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{e^2}|u_n - \alpha|$.

b)En déduire que pour tout entier n, positif ou nul, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq (\frac{3}{e^2})^n$.

c)Déterminer la limite de la suite (u_n). d)Déterminer une indice p pour lequel on est sûr d'avoir $|u_p - \alpha| \leq 10^{-3}$ .Calculer u_p à l'aide de votre calculatrice (on donnera la partie entière et les trois premières décimaux

PROBLÈME 4 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle, définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln(-x) - x + 1 & si\ x < 0 \\ f(x) = 1 + \ln(1 + x) & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

On appelle $(\boldsymbol{C_f})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1cm.

Partie A

1- a) Déterminer D_f domaine de définition de f.

b) Calculer les limites aux bornes de D_f.

c) Etudier les branches infinies de la courbe représentative $(\boldsymbol{C_f})$ de f.

2- a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

3- a) Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ puis pour $x > 0$.

b) Etudier les variations de f puis dresser le tableau de variation.

4- a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $]-\infty;0[$.

b) Prouver que $-4 < x_0 < -3$.

c) En déduire les coordonnées du point d'intersection de $(\boldsymbol{C_f})$ avec l'axe des abscisses.

5-Construire la courbe $(\boldsymbol{C_f})$.

6-Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0;+\infty[$.

a) Etudier les variations sur $[0;+\infty[$ de la fonction définie par $h(x) = g(x) - x$.

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [1;3]$.

c) En déduire que α est solution de l'équation $g(x) = x$.

<u>Partie B</u>

On définit la suite numérique $(U_n)_{n\in IN}$

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$$

1) Démontrer que la suite $(U_n)_{n\in IN}$ est bien définie et croissante. Démontrer que pour tout entier naturel n, $U_n \geq 1$.

2) Démontrer pour tout x de l'intervalle $[1;+\infty[$, on a $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$

3) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ (α est le réel défini dans la **partie A** 6)).

4) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

5)Démontrer que la suite (U_n) converge vers α .

6)Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $|U_P - \alpha| \leq 10^{-1}$. Que représente U_P pour α ?

<u>Le BAC, j'ai confiance</u> !