Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2018-2019 **Lycée :** CDM (Saint-Louis)	**SÉRIE D'EXERCICES** Suites Numériques	**Niveau** : TS1 **Professeur** : M. DiamBa

Exercice 1 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \neq 0$, fixé, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{u_{n-1}}{3-2u_{n-1}}$.

1. Déterminer a, réel non nul, tel que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n + a}{u_n}$ soit géométrique.

Déterminer alors la raison de (v_n).

2. Suivant la valeur de v_0, discuter la convergence de (v_n) et son sens de variation. En déduire la limite de (u_n). Etudier (u_n) pour $u_0 = \frac{1}{2}$.

Exercice 2 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - 2u_{n-1} = 2n + 3$.

1. Montrer qu'il existe un réel b indépendant de n tel que : $v_n = u_n + 2n + b$ soit le terme général d'une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

2. En déduire que pour tout n : $u_n = 2^{n+3} - 2n - 7$.

3. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Calculer S_n en fonction de n, déterminer la limite de (S_n) et calculer la plus petite valeur de n pour laquelle S_n est supérieure à 2017.

4. On pose $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Calculer T_n en fonction de n et déterminer la limite de (T_n)

Exercice 3 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

1. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 2^n u_n$.

a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme et la raison.

b) En déduire que pour tout n : $u_n = 2^{-n}(3n+1)$.

2.a) Démontrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $2^n > \frac{n(n-1)}{2}$.

b) En déduire que la suite de terme général $\frac{n}{2^n}$ converge vers 0. Donner alors la limite de (u_n).

3. En remarquant que $u_n = 4u_{n+2} - 4u_{n+1}$, exprimer $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$ en fonction de u_1 et u_{n+2}.

En déduire la limite de (S_n).

Exercice 4 :

1. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Pour tout $n \geq 2$, on pose $v_n = u_{n-1} - \ln n$.

a) Montrer que : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$, $\forall\, n \geq 1$.

b) En déduire que : $\forall\, n \geq 1$, $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$.

c) Quelle est la limite de (u_n) ?

2. Soient les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

a) Etudier les variations de f et g. Déterminer leur limite en $+\infty$.

b) En déduire que : $\forall\, n \geq 1 :\ 0 \leq \mathrm{f}(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

c) Vérifier que : $\forall\, n \geq 2,\ v_n = \mathrm{f}(1) + \mathrm{f}(2) + \cdots + \mathrm{f}(n-1)$.

d) En déduire que (v_n) est croissante et que : $\forall\, n \geq 2,\ \mathrm{f}(1) \leq v_n < 1 - \frac{1}{n+1}$.

e) Justifier que (v_n) converge vers un réel ℓ dont on donnera en encadrement.

Exercice 5 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer que (u_n) converge vers e.

On se propose de retrouver ce résultat par une autre approche.

2.a) En utilisant le fait que pour $x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ et $u_n \leq e$.

b) Montrer que : $\forall\, n \geq 2,\ -n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \geq 1$ *et* $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \geq e$.

c) En déduire que : $\forall\, n \geq 1,\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ et $0 \leq e - u_n \leq \frac{e}{n}$.

Conclure pour la convergence de (u_n).

Exercice 6 :

Soit la suite (U_n) définie par $u_1 = 2$ et $\forall\, n \geq 1,\ \ln U_{n+1} = \frac{1}{2}\left[\ln U_n + \ln \frac{n}{(n+1)^2}\right]$.

1. Vérifier que cette suite est bien définie.

2. On pose pour tout $n \geq 1,\ V_n = nU_n$ et $W_n = \ln V_n$.

Déterminer la relation entre V_n et V_{n+1} puis en déduire que (W_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3. Montrer que la suite (W_n) converge et en déduire que (U_n) converge vers un réel à préciser.

4. Calculer la somme $S_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$. En déduire une expression du produit $P_n = V_1 . V_2 \ldots V_n$ puis une expression du produit $Q_n = U_1 . U_2 \ldots U_n$.

Etudier les limites éventuelles des suites (S_n), (P_n) et (Q_n).

Exercice 7 :

1. Soit x un nombre réel positif ou nul et k un entier strictement supérieur à x.

a) Montrer par récurrence sur n, que : $\forall\, n \geq k,\ \frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq k$, $\frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \times \frac{k^k}{k!}$

c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

2.a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1$.

(On pourra écrire $\frac{n^{n-1}}{n!}$ comme un produit de n – 1 facteurs supérieurs ou égaux à 1)

b) En déduire que la suite $\left(\frac{n^n}{n!}\right)$ diverge vers $+\infty$.

Exercices CIAM, TSM :

Page 293 : N°32, N°33, N°35 et N°36

Page 294 : N°39, N°40, N°41 et N°42.