Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2016-2017 **Lycée :** CDM (Saint-Louis)	**SÉRIE D'EXERCICES** **PROBABILITE**	**Niveau** : TS1 **Professeur** : M. DiamBa

Exercice 1 :

Dans une urne, il y a 9 boules blanches ou noires, petites ou grosses. On sait qu'il y a 5 grosses et 4 petites, et que 6 sont blanches et 3 sont noires.

1. Sachant qu'il y a 3 boules à la fois blanches et grosses, déterminer le nombre de boules «petites et noires », « petites et blanches». (On pourra utiliser un diagramme).

2. On tire une boule au hasard ; chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, déterminer les probabilités pour qu'elle soit : **a)** petite et blanche **b**) blanche **c)** blanche ou petite **d)** ni blanche ni petite.

Exercice 2 :

Un sac contient 9 jetons numérotés de 1 à 9. On suppose que les tirages sont équiprobables.

1. On tire successivement, sans remise, 3 jetons du sac on forme ainsi un nombre de 3 chiffres. Calculer la probabilité pour que :

a) le chiffre des unités du nombre obtenu soit 9 **b)** le chiffre 9 figure dans le nombre c) la somme des chiffres obtenus soit 9.

2. Maintenant on suppose que le tirage successif des 3 jetons se fait avec remise. Calculer la probabilité pour que : **a**) le chiffre des centaines soit 9 **b)** le chiffre 9 ne figure pas dans le nombre **c)** le chiffre 9 figure exactement une fois dans le nombre.

Exercice 3 :

Un programme d'histo-géo d'un candidat au BAC se compose de 15 chapitres d'histoire et de 12 chapitres de géographie. Le candidat n'a étudié que 11 chapitres d'histoire et 10 chapitres de géographie. Il a fait l'impasse sur les 6 autres chapitres dont il ne sait rien. Le sujet comporte 2 questions d'histoire et 2 questions de géographie portant sur des chapitres distincts. Le candidat ne doit traiter qu'une seule question (au choix) dans chacune des deux disciplines. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « le candidat ne sait traiter aucune des 4 questions» ; **B** : « le candidat sait traiter les 4 questions»

C : « le candidat sait traiter au moins une des 4 questions» ;

D : « le candidat sait traiter au moins une question d'histoire et au moins une question de géographie ».

Exercice 4 :

On lance trois fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Les résultats sont alors les triplets (a , b , c) , où a, b et c sont des entiers de l'ensemble {1,2,3,4,5,6}.

1. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A: «le triplet vérifie : $a = b = c$ »; **B**: «le triplet vérifie : $a \neq b$ et $a \neq c$ »; **C**: «le triplet vérifie : $a \leq b$ et $b = c$ » ; **D** : «le triplet vérifie : $a < b$ » ; **E** : «le triplet vérifie : $a = 1$ et $b \leq c$ » ; **F** : «le triplet vérifie : $a \leq b \leq c$ ».

2. On considère l'équation du second degré $x^2 + bx + c = 0$.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : «l'équation admet 2 solutions réelles distinctes » ; **B** : «l'équation admet 2 solutions réelles confondues ».

3. On considère le système suivant d'inconnues réelles x et y : $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ ax - by = c \end{cases}$.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : «le système a une infinité de solutions » ; **B** : «le système n'admet pas de solution » ;

C : «le système admet une unique solution ».

Exercice 5 :

Pour un examen, 10 examinateurs ont préparé chacun 2 sujets. On dispose donc de 20 sujets que l'on place dans des enveloppes identiques. Deux candidats se présentent : chacun choisit au hasard 2 sujets ; de plus les sujets choisis par le premier candidat ne seront plus disponibles pour le second.

On note A_1 l'événement : « les 2 sujets obtenus par le premier candidat proviennent du même examinateur» et A_2 : « les 2 sujets obtenus par le second candidat proviennent du même examinateur».

1. Montrer que la probabilité de A_1 est 1/19.

2. a) Calculer directement la probabilité conditionnelle $p(A_2/A_1)$.

b) Montrer que la probabilité que les deux candidats obtiennent chacun deux sujets du même examinateur est égale à 1/323.

3.a) Calculer $p(A_2/\overline{A_1})$.

b) En remarquant que $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap \overline{A_1})$, calculer $p(A_2)$ puis en déduire que $p(A_2 \cup A_1) = 33/323$.

Exercice 6 :

Une usine fabrique des pièces dont 1,8% sont défectueuses. Le contrôle des pièces s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

- sachant qu'une pièce est bonne, on l'accepte avec une probabilité de 0,97
- sachant qu'une pièce est mauvaise, on l'a refusé avec une probabilité de 0,99.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse ?

2.a) Démontrer que la probabilité qu'une pièce soit défectueuse et acceptée est 0,00018.

b) Démontrer que la probabilité qu'une pièce soit bonne et refusée est 0,02946.

c) Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur dans le contrôle.

Exercice 7 :

Une entreprise fabrique des appareils électroniques. La probabilité pour qu'un appareil fabriqué fonctionne parfaitement est de 9/10.

1. On note F l'événement « l'appareil fonctionne parfaitement». Calculer la probabilité de $\overline{F}$.

2. On fait subir à chaque appareil un test avant sa livraison. On constate que :

- quand un appareil est en parfait état de fonctionnement il est toujours accepté à l'issue du test ;
- quand un appareil n'est pas en parfait état de fonctionnement il peut être néanmoins accepté avec une probabilité de 1/11.

On note T l'événement « l'appareil est accepté à l'issue du test».

a) Vérifier que $p(T \cap F) = 9/10$. Calculer $p(T \cap \overline{F})$.

b) En déduire la probabilité de T. Calculer $p(F / T)$.

Exercice 8 :

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants : chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs ; chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs. On choisit un individu au hasard.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2. Quelle est la probabilité : **a)** qu'il soit malade et qu'il ait un test positif ? **b)** qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ? **c)** qu'il ait un test positif ? **d)** qu'il ait un test négatif ?

3. Calculer la probabilité : **a)** qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif **?** **b)** qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ?

Exercice 9 :

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. On admet que lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est 0,4 et que s'il décroche, la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire est 0,3.

1. On note : D_1 l'évènement : « la personne décroche au premier appel » ;

R_1 l'évènement : « la personne répond au questionnaire lors du premier appel ».

Que peut-on dire de l'événement $R_1 \cap \overline{D_1}$? Calculer la probabilité de l'évènement R_1.

2. Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité pour que le correspondant ne décroche pas la seconde fois est 0,3 et la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire sachant qu'il décroche est 0,2. Si une personne ne décroche pas lors du second appel, on ne tente plus de la contacter. (On pourra utiliser un arbre de probabilités.)

On note : D_2 l'évènement : « la personne décroche au second appel » ; R_2 l'évènement : « la personne répond au questionnaire lors du second appel » ; R l'évènement : « la personne répond au questionnaire ». Montrer que la probabilité de l'évènement R_2 est 0,056. Calculer la probabilité de l'évènement R.

3. Sachant qu'une personne a répondu au questionnaire, calculer la probabilité pour que la réponse ait été donnée lors du premier appel. (On donnera la réponse arrondie au millième.)

4. Un enquêteur a une liste de 25 personnes à contacter. Les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Quelle est la probabilité pour que 20 % des personnes répondent au questionnaire ?

Exercice 10 :

Dans une classe de 30 élèves, sont formés un club photo et un club de théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a 2 élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard. On appelle P l'événement : « l'élève fait partie du club photo » et T l'événement : « l'élève fait partie du club théâtre ». Montrer que les événements P et T sont indépendants.

2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

a) On appelle T_1 l'événement : « Le premier élève appartient au club théâtre ». Calculer $p(T_1)$.

b) On appelle T_2 l'événement « L'élève pris en photo appartient au club théâtre ».

Calculer $p_{T_1}(T_2)$ puis $p_{\overline{T_1}}(T_2)$. En déduire $p(T_2 \cap T_1)$ et $p(T_2 \cap \overline{T}_1)$. Calculer $p(T_2)$.

3. Toutes les semaines on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite. Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.

Exercice 11 :

Une boîte contient 8 cubes : 1 gros rouge et 3 petits rouges, 2 gros verts et 1 petit vert, 1 petit jaune. Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte. On admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur.

1. On note A l'événement : "Obtenir des cubes de couleurs différentes" et B l'événement : "Obtenir au plus un petit cube". a) Calculer la probabilité de A. b) Vérifier que la probabilité de B est égale à 2/7.

2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.

a) Déterminer la loi de probabilité de X. **b)** Calculer l'espérance mathématique de X.

3. L'enfant répète 5 fois l'épreuve "tirer simultanément 3 cubes de la boîte", en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants. On note p la probabilité que l'événement B soit réalisé.

a) Déterminer la probabilité que B soit réalisé au moins une fois à l'issue des 5 épreuves.

b) Déterminer la probabilité que l'événement B soit réalisé exactement 3 fois.

Exercice 12 :

Un sac contient 4 jetons rouges numérotés 1, 2, 3, 4 et 4 jetons noirs numérotés 1, 2, 3, 4.

1. Un joueur tire au hasard et simultanément 2 jetons du sac. On convient de la règle suivante : s'il tire les 2 jetons numérotés 1, il gagne 600F ; s'il tire 2 jetons de même couleur, il gagne 200F ; dans tous les autres cas il perd 200F.

a) Quelle est la probabilité pour qu'il tire 2 jetons numérotés 1 ?

b) Quelle est la probabilité de tirer 2 jetons de même couleur ? **c)** Quelle est la probabilité de perdre 200F ?

2. Après le premier tirage, le joueur remet les 2 jetons tirés dans le sac et procède à un deuxième tirage de 2 jetons, en convenant de la même règle.

Soit X la variable aléatoire qui, à deux tirages successifs, associe le gain du joueur (positif ou négatif).

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) En déduire la probabilité pour que le gain du joueur soit au moins égal à 400F.

Exercice 13 :

1. On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note p_i la probabilité d'apparition de la face i. Les p_i vérifient : $p_1 = p_2$; $p_3 = p_4 = 2p_1$; $p_5 = p_6 = 3p_1$.

a) Montrer que $p_1 = \frac{1}{12}$.

b) Montrer que la probabilité de l'événement A : "Obtenir 3 ou 6" est égale à $\frac{5}{12}$.

2. Un jeu d'adresse consiste à lancer le dé décrit ci-dessus puis à lancer une fléchette sur une cible fixe.

Si le joueur obtient 3 ou 6, il se place à 5 m de la cible et lance la fléchette ; à 5 m, la probabilité d'atteindre la cible est alors $\frac{3}{5}$.

Si l'événement A n'est pas réalisé, il se place à 7 m de la cible et lance la fléchette ; à 7 m, la probabilité d'atteindre la cible est alors $\frac{2}{5}$. On note C l'événement : "La cible est atteinte".

a) Déterminer $p(C/A)$ et $p(C/\bar{A})$. En déduire que $p(C) = \frac{29}{60}$. **b)** Déterminer $p(A/C)$.

3. Le joueur dispose de 10 fléchettes qu'il doit lancer une à une, de façon indépendante, dans les mêmes conditions que précédemment définies. Calculer la probabilité qu'il atteigne la cible exactement 4 fois.

Exercice 14 :

Pendant l'année scolaire, la cantine d'un lycée propose souvent du riz. Le premier jour de l'année, il y'a deux 2 chances sur 5 qu'elle propose du riz. Si elle en propose un jour, il y a une chance sur 3 qu'elle en propose le lendemain. Si elle n'en propose pas un jour, il y a une chance sur 3 qu'elle n'en propose pas le lendemain. On appelle J_n l'événement "la cantine propose du riz le n-ième jour" et K_n l'événement "la cantine n'en propose pas le n-ième jour". Soit p_n la probabilité de l'événement J_n.

1. Déterminer $p(J_2/J_1)$ et $p(J_2/K_1)$. En déduire p_2.

2. Montrer que $p_n = -\frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{3}$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = p_n - \frac{1}{2}$. a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. b) Calculer u_n puis p_n en fonction de n.

c) Un élève de l'établissement, fin mathématicien, ne mange à la cantine que les jours pairs. Montrer qu'à chaque fois qu'il se rend à la cantine la probabilité qu'il a de manger du riz est comprise entre 1/2 et 8/15.

Exercice 15 :

Un tiroir contient, pêle-mêle, 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. Toutes les paires de chaussures sont de modèles différents, mais indiscernables au toucher.

1) On tire simultanément 2 chaussures au hasard et l'on admet l'équiprobabilité des tirages.

a) Calculer la probabilité de l'événement A : « tirer 2 chaussures de la même couleur ».

b) Calculer la probabilité de l'événement B : « tirer un pied gauche et un pied droit ».

c) Montrer que la probabilité de l'événement C : « tirer les deux chaussures d'un même modèle » est 1/19.

2) On ne conserve plus dans le tiroir qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges. On tire successivement et sans remise une chaussure du tiroir jusqu'à ce que le tiroir soit vide.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.

a) Justifier que X prend les valeurs 2, 3, 4.

b) Montrer que la loi de probabilité de X est : p(X=2)=1/6 ; p(X=3)=1/3 et p(X=4)=1/2.

c) Calculer son espérance mathématique et son écart-type.

Exercice 16 :

On dispose de trois urnes U_1 , U_2 et U_3.

U_1 contient 3 boules vertes et 2 boules rouges ; U_2 contient 4 boules vertes et 5 boules jaunes ; U_3 contient 5 boules jaunes, 4 boules rouges et 1 boule verte.

Description de l'épreuve :

L'épreuve consiste à tirer une boule dans U_1. Si elle est verte, on la met dans U_2 puis on tire une boule dans U_2. Si elle est rouge, on la met dans U_3 puis on tire une boule dans U_3.

Questions :

A)1. Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première tirée est verte.

2. Calculer la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage sachant que la première tirée est rouge.

3. En déduire la probabilité d'avoir une boule verte au deuxième tirage.

4. Calculer la probabilité d'avoir une boule jaune au second tirage.

5. Calculer la probabilité d'avoir une boule rouge au second tirage.

B) Au cours de cette épreuve si on obtient au deuxième tirage :

- une boule verte, on gagne 1000F ;

- une boule jaune, on gagne 500F ;
- une boule rouge, on perd 500F.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque boule obtenue au second tirage, associe un gain défini ci-dessus

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique de X.

C) Cette épreuve est faite par chacun des 15 élèves d'une classe dans les mêmes conditions et d'une manière indépendante. (Les résultats seront donnés au centième prés par défaut.)

1. Calculer la probabilité pour que 8 élèves obtiennent une boule verte au second tirage.
2. Calculer la probabilité pour que seulement les 8 premiers obtiennent une boule verte au second tirage.
3. Calculer la probabilité pour qu'au moins un élève ait une boule verte au second tirage.

Exercice 17 :

Dans tout l'exercice, les probabilités seront données au centième près par défaut.

Une laiterie fabrique des fromages dont la masse théorique est 250g. On note X la variable aléatoire ayant pour valeurs les masses possibles du produit exprimées en grammes. On note p_i la probabilité qu'un fromage soit de masse x_i. On donne :

$X = x_i$	220	230	240	250	260	270	280
$p(X = x_i) = p_i$	0,08	0,10	0,15	0,32	0,16	0,15	0,04

1. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.
2. On prélève un fromage au hasard. Quelle est la probabilité que sa masse soit au moins de 250g ?
3. On prélève au hasard dix fromages. (On admettra que les tirages sont avec remise et indépendants.)
   Quelle est la probabilité d'avoir : a) au moins un fromage de 220g ?
   b) au plus un fromage de 220g ?
4. La production est vérifiée par une machine chargée d'éliminer les produits de masse strictement inferieure
   à 250g. La probabilité qu'un fromage de 220g soit éliminé est 1 ; elle est égale à 0,8 s'il s'agit d'un fromage de 230g, et à 0,7 pour un fromage de 240g. La machine n'élimine pas les fromages de masse supérieure ou égale à 250g.
   Quelle est la probabilité pour un fromage d'être éliminé ?

Exercice 18 :

Pour une expérience aléatoire donnée, A et B sont deux événements indépendants.

1. a) Démontrer que $p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \times p(B)$. En déduire que $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \times p(\bar{B})$.

b) On pose $p(A) = a$ et $p(B) = b$. Calculer $p(\bar{A} \cap \bar{B})$ en fonction de a et b.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} + x - 1$.

a) Etudier les variations de f.

b) Démontrer que pour tout x réel, $1 - x \leq e^{-x}$.

3. On suppose que a + b = $\frac{1}{2}$.

Démontrer que $\frac{1}{2} \leq p(\bar{A} \cap \bar{B}) \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$.