Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2015-2016 **Lycée :** Kébémer (LOUGA)	**SÉRIE D'EXERCICES** **NOMBRES COMPLEXES**	**Niveau** : TERMINALE S2 **Professeur** : M. KEBE

EXERCICE 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1°) $z^2 = -5 + 12i$ **2°)** $z^3 = 1 + i$

2°) $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\dfrac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0$

Soit $S_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) + \dots\dots\dots + \sin\left(\dfrac{n-1}{n}\pi\right)$ n entier naturel non nul. On pose $z = e^{i\frac{\pi}{n}}$

3) Donner une expression simple de $S = 1 + z + z^2 + z \;\; + \dots\dots + z^{n-1}$

4) En déduire que $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$

EXERCICE 2

Soit $w = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1) Calculer w^2.

2) Déterminer le module et un argument de w^2.

3) Donner une écriture exponentielle de w^2.

4) En déduire un argument de w.

EXERCICE 3

1°) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$z^2 - 2z + 4 = 0$.

On désigne par z_1 la solution de partie imaginaire positive et par z_2 l'autre solution.

b) Donner un argument et le module de chacune des solutions z_1 et z_2. En déduire le module et un argument des complexes z_1^2 et z_2^2, puis écrire ces 2 nombres sous forme algébrique.

2°) a) Placer dans le plan les points A, B, A' et B' d'affixes respectives $1 + i\sqrt{3}$, $1 \;\; i\sqrt{3}$, $2 + 2i\sqrt{3}$ et $2 \;\; 2i\sqrt{3}$.

b) Déterminer la nature du quadrilatère AA'BB' .

c) Montrer que le triangle AA'B' est rectangle et qu'il en est de même du triangle BB'A'

En déduire que les 4 points A, A', B et B' sont sur un même cercle dont on déterminera le centre Ω et le rayon r.

EXERCICE 4 : **Calcul de $\cos\frac{\pi}{5}$**

Au nombre complexe z, on associe le nombre complexe $Z = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.

1°) a) Vérifier que si $z \neq 1$, alors $Z = \frac{1-z^5}{1-z}$.

b) On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$; calculer Z.

En déduire la valeur de : $S = 1 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}$.

2°) Montrer que :

$\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5} = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2$.

$\cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} = 2\cos\frac{\pi}{5}$.

(Indication : *remarquer que :* $\frac{8\pi}{5} = 2\pi - \frac{2\pi}{5}$ *et* $\frac{6\pi}{5} = 2\pi - \frac{4\pi}{5}$)

Utiliser ces égalités et la valeur trouvée pour S au *1°b* pour calculer $\cos\frac{\pi}{5}$

EXERCICE 5

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $U_0 = 4$, de raison $\frac{1}{2}$.

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $V_0 = \frac{\pi}{4}$, de raison $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout entier naturel n, on note z_n le nombre complexe de module U_n et dont un argument est V_n .

1°) a) Exprimer U_n et V_n en fonction de n .

b) En déduire z_n .

2°) Démontrer que (z_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ i et de premier terme $z_0 = 2\sqrt{2} + i\,2\sqrt{2}$.

3°) Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = z_0\, z_1\, z_2 \ldots\ldots\ldots z_n$.

a) Exprimer en fonction de n un argument de Z_n .

b) Démontrer que si n est impair, alors Z_n est réel .

EXERCICE6

1°) $\theta \in [0 ; 2\pi[$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)\, z + 2^{2\theta} = 0$ (1) .

Donner les solutions sous forme exponentielle.

2°) On considère les points A, B d'affixes les solutions de (1).

Déterminer θ pour que OAB soit équilatéral dans un repère orthonormé direct

EXERCICE 7

1°) Déterminer les complexes solutions de l'équation $z^4 = 1$.

2°) Déterminer sous forme trigonométrique les solutions de l'équation $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$.

3°) Soit $a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\, i$.

Vérifier que $a^4 = 8(1 \;\; i\sqrt{3})$. En déduire sous forme algébrique les résultats de 2°.

4°) Des questions 2° et 3°, déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

EXERCICE 8

On considère le polynôme à variables complexes défini par :
$P(z) = z^3 - 2(1 + i)z^2 - 2(1 - 4i)z + 4(2 + i)$.
1°) Montrer que p(z) admet une racine z_0 de la forme iy ($y \in R$) que l'on précisera.
2°) Déterminer les complexes a et b tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$; puis achever la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.
On désignera par z_1 et z_2 les racines autres que z_0 avec $|z_1| > |z_2|$.
3°) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2 ; I le point d'affixe 2 et par r la rotation de centre i et d'angle $\frac{\pi}{2}$ .Ecrire $\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}$ Sous forme trigonométrique et En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

EXERCICE 9

Soit $S = 1 + \cos x + \cos 2x + \ldots\ldots + \cos nx$
$S' = \sin x + \sin 2x + \ldots\ldots + \sin nx$

1)Montrer que $1 - e^{i\alpha} = e^{\frac{i\alpha}{2}}\left(e^{\frac{-i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}}\right)$

En déduire que $1 - e^{i\alpha} = -2i\sin\frac{\alpha}{2}\, e^{\frac{i\alpha}{2}}$ (1)

2) Calculer $S + iS'$

3) Montrer que $S = \dfrac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}\cos(\frac{nx}{2})$ et $S' = \dfrac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}\sin(\frac{nx}{2})$

Indication : Utiliser (1)

AU BOULOT !