Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2014-2015 Lycée : LAF-LEPAC (Saint-louis)	SÉRIE D'EXERCICES Nombres Complexes	Niveau : TS1 Professeur : M. DiamBa

Exercice 1:

1) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$(2-i)(3+i)$; $(2+i)^2$; $\frac{1+i}{1-i}$; $\frac{(-1-2i)^3}{(1+i)^4}$; $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{15}$; $\frac{(1+i)^3}{1-i}+\frac{(1-i)^4}{(1+i)^2}$.

2) Déterminer les parties réelles et imaginaires de z dans les cas suivants

$z=(3+4i)^3$; $z=(3+4i)^3-(2-i)^3$; $z=\frac{2+i}{3+4i}-\frac{3-4i}{2-i}$;

$z=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^2$.

3) Calculer le module des nombres complexes suivants :

$\frac{2}{1-i}$; $\frac{-1}{4i}$; $\frac{(-5+7i)(4-2i)}{(3+4i)(7+5i)}$; $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^3$; $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{17}$; $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{1992}$.

4) Déterminer z pour que z, 1 – z et z^2 aient le même module.

Exercice 2 :

1) Déterminer sous forme algébrique les nombres complexes z vérifiant la condition proposée : $z+2\bar{z}=2+9i$; $3z=7-\bar{z}$; $\overline{\bar{z}-2i}=2z$; $\overline{(1+i)\bar{z}-1+i}=\bar{z}-i$; $z+2\bar{z}\in\mathbb{R}$; $z+i\bar{z}\in i\mathbb{R}$; $z+2\bar{z}=6+i$; $z-9z\in\mathbb{R}$.

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z pour que :

$|i-z|=|iz-1|$; $|z+1+i|=|4+3i|$; $|3z-36|=|5z-40i|$; $z+\bar{z}=|z|$

$\sqrt{2}\leq|\bar{z}-4+i|\leq\sqrt{3}$.

3) Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z pour que :

a-) les points A(i), M(z) et N(iz) soient alignés ; b-) $\arg(z-i)=\arg(z+1)+k\pi$;

c-) $\arg\left(\frac{z-1}{z-4}\right)=\frac{\pi}{3}+k\pi$; d-) $\arg(z-i)=\frac{\pi}{2}+\arg(z+1)+2k\pi$.

Exercice 3 :

1) Dans chacun des cas suivants, déterminer le module et un argument de z puis en déduire la forme algébrique de z. $z=(1-i)^4$; $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$; $z=\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{-1+i}\right)^3$; $z=\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$; $z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{17}$; $z=\frac{(1+i)^3}{(1-i\sqrt{3})^4}$.

2) Ecrire les nombres complexes sous forme trigonométrique ou exponentielle :

$z=\frac{(1+i\sqrt{3})(\sin\theta+i\cos\theta)}{2(1-i)(\cos\theta-i\sin\theta)}$ $(\theta\in\mathbb{R})$; $z=\frac{1-\cos\theta-i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}$ $(\theta\in\mathbb{R})$; $z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^3$; $z=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{1992}$; $z=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{72}$; $z=\frac{(1+i\tan\theta)^2}{1+\tan^2\theta}$ $\left(\theta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$.

Exercice 4 :

On considère les complexes $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = 1 - i$; $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

1) Ecrire z_3 sous forme algébrique.

2) Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2 .

3) Ecrire z_3 sous forme trigonométrique. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

4) On pose $z = 2\sqrt{3} + 2 + i(2\sqrt{3} - 2)$.

a-) Déterminer les entiers naturels n pour lesquels z^n est imaginaire pur.

b-) Déterminer les entiers naturels n pour lesquels z^n est un réel négatif.

Exercice 5 :

A tout nombre complexe z distinct de -1+2i, on associe le complexe $Z = \frac{z - 2 + 4i}{z + 1 - 2i}$.

Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie :

i) Z est un nombre réel ;

ii) Z est un nombre réel strictement positif ;

iii) Z est un complexe imaginaire pur ;

iv) $|Z| = 1$;

v) $|Z| = 2$.

Exercice 6 :

On considère la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z' = \frac{2iz - 5}{z - 2i}$.

1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{2i\}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{2i\}$.

2) Soient M, M' et A les points d'affixes respectives z, z' et 2i dans le plan complexe $\mathscr{P}$ et T la transformation de $\mathscr{P}\backslash\{A\}$ dans $\mathscr{P}\backslash\{A\}$ qui, à M fait correspondre M'.

a-) Montrer que T admet deux points invariants B et C.

b-) Déterminer la composée ToT.

c-) Montrer que la droite (yy') est globalement invariante par T.

3) Montrer que pour $z \neq 2i$, $|z - 2i|\times|z' - 2i| = 9$.

4) En déduire l'image par T du cercle Γ de centre A et de rayon r. Déterminer r pour que Γ soit invariant par T.

Exercice 7 :

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. Soit A(1 ; 0) et B(-1 ; 0). A tout point M d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M' d'affixe z' défini par : $z.z' = 1$.

1) a-) Construire M' quand $z = 2(1 + i)$.

b-) Dans le cas général, montrer que la droite (AB) est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ et que $OM\times OM' = OA^2$.

2) a-) Vérifier que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $\left(\frac{z+z'}{2} - 1\right)\left(\frac{z+z'}{2} + 1\right) = \left(\frac{z-z'}{2}\right)^2$.

b-) Soit I le milieu de [MM']. En utilisant a-), montrer que $IA\times IB = IM^2$ et que pour $M \neq A$ et $M \neq B$, la droite (MM') est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$.

Exercice 8 :

On définit les nombres complexes z_n de la manière suivante :

$z_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i$.

1) Pour tout n de ℕ, on pose $u_n = z_n - i$.

a) Calculer u_{n+1} en fonction de u_n.

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier n : $u_n = (1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2) a) Exprimer, en fonction de n, la partie réelle x_n et la partie imaginaire y_n de u_n.

b) Calculer les limites des suites (x_n) et (y_n). On note A_n le point du plan complexe d'affixe u_n et B_n le point d'affixe z_n.

c) Calculer le module et un argument de u_n. Montrer que les points A_n sont alignés.

d) Montrer que les points B_n sont alignés.

Exercice 9 :

1) Résoudre dans ℂ : $2iz - 3i + z(1+i) = 0$; $2z - 2 + iz = 8 - 6i + (1+2i)z$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}^2$:

$\begin{cases}(1-2i)z + 5iz' = 13 + 14i \\ (2+i)z - (3+i)z' = -8 + 2i\end{cases}$; $\begin{cases}-2(2+i)z_1 + 7z_2 = 1 + 2i \\ (1-i)\overline{z_1} - \overline{z_2} = 4 - i\end{cases}$

Exercice 10:

1) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par la donnée de $z_0 = 2\sqrt{2}(1-i)$ et les conditions suivantes : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $arg(z_{n+1}) \in \left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ et ${z_{n+1}}^4 = z_n$.

a) Déterminer le module et un argument de z_1.

b) On pose $r_n = |z_n|$ et $v_n = \ln r_n$. Montrer que (v_n) est géométrique.

2) Trois nombres complexes z_1, z_2 et z_3 ont pour produit $3i\sqrt{3}$. Leurs arguments θ_1, θ_2 et θ_3 sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$ et leurs modules r_1, r_2 et r_3 sont les termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 2. Sachant que $\theta_1 \in \left[0\ ;\ \frac{2\pi}{3}\right]$, déterminer z_1, z_2 et z_3.

Exercice 11 :

Soit le nombre complexe $a = -1 - i$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par :

$\begin{cases} z_0 = 0 \quad ; \quad z_1 = i \\ z_{n+1} = (1-a)z_n + az_{n-1}\ ,\forall\, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

1) Déterminer z_2 et z_3 sous forme algébrique.

2) Soit (u_n) la suite définie par $u_n = z_{n+1} - z_n\ ,\forall\, n \in \mathbb{N}$

a) Déterminer u_0 et u_1 sous forme algébrique.

b) Démontrer que (u_n) est géométrique de raison $-a$.

c) Exprimer u_n en fonction de n et a.

3) Soit $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$. Exprimer S_n en fonction de z_n.

En déduire que $z_n = -1 + (1+i)^n$.

4) a) Déterminer le module et un argument de a.

b) Donner la forme algébrique de z_{19}.

Exercice 12 :

Résoudre dans ℂ :

$z^2 - 2z + 4 = 0$; $z^2 - 8z + 25 = 0$; $z^2 - 2iz - 2 = 0$;

$z^2 - 4z + 5 + i(z+1) = 0$; $(z^2 - 4z + 5)^2 - (z+1)^2 = 0$; $4z^2 + 8|z| - 3 = 0$

$(z^2 - 4z + 5)^2 + (z+1)^2 = 0$; $2z^2 - 2(1+\cos\theta)z + 1 + \cos\theta = 0$;

$z^2 \tan^2\theta - 2z\tan^3\theta + 1 + \tan^4\theta = 0 \left(\theta \neq 0 \left[\frac{\pi}{2}\right]\right)$; $z^2\cos^2\theta - 2z\cos^2\theta + 1 = 0$

$z^2 - 2(e^{\alpha}\sin\alpha)z + e^{\alpha} = 0$; $z^3 - \left(2\cos\theta\, e^{i\theta}\right)z + e^{i2\theta} = 0$ $\left(\theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]\right)$;

$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0.$

Exercice 13 :

Calculer les nombres complexes z_1 et z_2 vérifiant :

$z_1 + z_2 = -6$ et $z_1 z_2 = 13$; $z_1 - z_2 = 2\sqrt{3}$ et $z_1 z_2 = -4$

$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{4}{5}$ et $z_1 z_2 = 5$; $z_1 - iz_2 = 2\sqrt{3}$ et $z_1 z_2 = 5i.$

Exercice 14 :

On considère l'application f de ℂ dans ℂ définie par :

$f(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12)$.

1) Démontrer que l'équation f(z) = 0 admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2, puis factoriser f(z).
2) Résoudre dans ℂ l'équation f(z) = 0.
3) Dans le plan complexe $\mathscr{P}$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3. Montrer que ces trois points sont alignés.

Exercice 15 :

1) Résoudre dans ℂ l'équation : $z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i = 0$. On notera z_1 et z_2 les solutions.
2) Pour tout entier $n \geq 2$, déterminer les racines n-ièmes de z_1 et de z_2.
3) Soit M_n le point d'affixe z_1^n, P_n le point d'affixe z_2^n dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Déterminer les entiers n tels que le triangle OM_nP_n soit rectangle.

Exercice 16 :

Soit a, b, c des nombres complexes deux à deux distincts ; $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) a) Montrer que les solutions de l'équation $\bar{z} = jz^2$ ont pour module 0 ou 1.
   b) En déduire les solutions de l'équation.
2) Soit les points A(a), B(b) et C(c). Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   i) ABC est un triangle équilatéral
   ii) j est une racine de $a + bz + cz^2 = 0$
   iii) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.
   iv) $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c-a} = 0.$

Exercice 17 :

Soit $z = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, on pose $\alpha = z + z^2 + z^4$.

a-) Calculer $\alpha + \bar{\alpha}$ et $\alpha\bar{\alpha}$.

b-) En déduire que :

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Exercice 18 :

Soit u un réel tel que $|u| < \pi$.

1) Montrer que : $e^{2iu} - 2ie^{iu}\sin u = 1$.
2) Calculer le module et un argument de chacune des solution de l'équation suivante : $z^2 - 2z(\cos u + i\sin u) + 2i\sin u\,(\cos u + i\sin u) = 0$.

Exercice 19 :

Soit $A = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta$ et $B = \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta$.

1) Montrer que si $\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ alors A = n + 1 et B = 0.
2) On suppose que $\theta \neq 2k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$. Calculer A et B.

Exercice 20 :

1) Montrer que $\cos\frac{\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} + \cos\frac{7\pi}{13} + \cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{11\pi}{13} = \frac{1}{2}$.
2) En déduire $\cos\frac{2\pi}{13} + \cos\frac{4\pi}{13} + \cos\frac{6\pi}{13} + \cos\frac{8\pi}{13} + \cos\frac{10\pi}{13} + \cos\frac{12\pi}{13}$.
3) Montrer que $\cos^2\frac{\pi}{14} + \cos^2\frac{3\pi}{14} + \cos^2\frac{5\pi}{14} = \frac{7}{4}$.

Exercice 21 :

1) **a-)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^4 - 2z^2 + 5 = 0$.
   b-) En déduire que l'on peut écrire $2z^4 - 2z^2 + 5$ comme le produit de deux trinômes du second degré à coefficients réels.
2) **a-)** Calculer $(2 + 3i)^3$.
   b-) En déduire les racines cubiques complexes de $-46 + 9i$. On donnera ces racines sous forme algébrique.