Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2019-2020 **Lycée :** Kébémer (LOUGA)	**SÉRIE D'EXERCICES** **LA FONCTION LN**	**Niveau** : TERMINALE S2 **Professeur** : M. KEBE

EXERCICE 1

Résoudre dans ℝ :

1°) $\ln x = -4$ **2°)** $\ln(x+2) + \ln(x-2) = \ln(2x+11)$ **3°)** $\ln(x+4) + \ln x = 0$
4°) $\ln(x^2 + 2x - 3) - 2\ln(x-1) = 2$ **5°)** $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$ **6°)** $\ln(x^2 + 5x + 6) = \ln(x+11)$ **7°)** $\ln^2 x + \ln x - 6 = 0$ **8°)** $2\ln^2 x - 3\ln x - 2 = 0$ **9°)** $\ln^2 x - 3\ln x = 0$ **10°)** $\ln^3 x - 2\ln^2 x - \ln x + 2 = 0$
11°) $\ln^4 x - 34\ln^2 x + 225 = 0$ **12°)** $\ln x < -2$ **13°)** $2\ln x \le \ln 3$ **14°)** $\ln x^2 \le \ln 3$ **15°)** $\ln(x+3) + \ln(x-4) < 2\ln(x-1)$ **16°)** $1 + \ln(x+3) > \ln(x^2 + 2x - 3)$ **17)** $\ln(\ln(x^2+1)) > 0$ **18°)** $\ln\left(\frac{3x+1}{x+2}\right) < 0$
19°) $\ln^2 x + \ln x - 2 > 0$ **20°)** $\ln^2 x - 3\ln x \le 0$.

EXERCICE 2

Déterminer les limites des fonctions suivantes aux bornes des intervalles de leur ensemble de définition :

1°) $f : x \mapsto x - \ln x$ **2°)** $f : x \mapsto (\ln x)^2 - x$ **3°)** $f : x \mapsto \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$ **4°)** $f : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x-1)$
5°) $f : x \mapsto \frac{1 + \ln x}{(\ln x)^2}$ **6°)** $f : x \mapsto (1-x)^2 - \ln x$ **7°)** $f : x \mapsto \ln\sqrt{x} - x$ **8°)** $f : x \mapsto f : x \mapsto \ln\sqrt{x+1} - x$
9°) $f : x \mapsto \frac{\ln(2x+1)}{\ln x}$ **10°)** $f : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{x}$ **11°)** $f : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{x^2}$ **12°)** $f : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{2-x}$
13°) $f : x \mapsto \frac{\ln(x^2+1)}{x}$ **14°)** $f : x \mapsto \ln(x^2 - x - 2)$ **15°)** $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x\ln x}$
16°) $f : x \mapsto \ln\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)$ **17°)** $f : x \mapsto 2x\ln x - x^2$ **18°)** $f : x \mapsto \frac{1}{x-1} + \ln(x-1)$ **19°)** $f : x \mapsto \ln|1-x|$
20°) $f : x \mapsto \frac{2\ln x + 1}{2x}$ **21°)** $f : x \mapsto \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$ **22°)** $f : x \mapsto (x+1)\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$
23°) $f : x \mapsto (x-2)\ln\left(\frac{x+1}{x^2 - 4x + 4}\right)$ **24°)** $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 3}\right)$

EXERCICE 3

Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré :

1°) $f : x \mapsto \frac{2}{3-x}$ sur $]3\,;+\infty[$ **2°)** $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ sur $]-\infty\,;+\infty[$ **3°)** $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$ sur $]1\,;+\infty[$, puis sur $]0\,;1[$ **4°)** $f : x \mapsto \tan x$ sur $]-\frac{\pi}{2}\,;0[$ **5°)** $f : x \mapsto \frac{x-1}{x^2-2x+3}$ sur R **6°)** $f : x \mapsto \frac{1}{2x+1}$ sur $]-\infty\,;-\frac{1}{2}[$ **7°)** $f : x \mapsto \frac{2\ln x}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ **8°)** $f : x \mapsto \frac{2x^2+x-1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$
9°) $f : x \mapsto \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ sur $[0\,;\frac{\pi}{4}[$ **10°)** $f : x \mapsto \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}$ sur $]0\,;\frac{\pi}{2}[$ **11°)** $f : x \mapsto \frac{1}{(x+1)[\ln(x+1)]^2}$ sur $]0\,;+\infty[$ **12°)** $f : x \mapsto \frac{2x}{1-x^2} + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ sur $]-1\,;1[$ **13°)** $f : x \mapsto 1 + \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$

(Indication : écrire $1 = x \times \frac{1}{x}$). En déduire les primitives de ln sur $]0 ; +\infty[$.**12°)** $f : x \mapsto \frac{13x+1}{x(x+1)}$ (on mettra d'abord f (x) sous la forme $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ avec a et b réels)

EXERCICE 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer les nombres réels α et β annulant le polynôme dénominateur Déterminer des réels a, b et c tels que, pour tout x élément de l'ensemble de définition de f, on ait :

$f(x) = a + \frac{b}{x-\alpha} + \frac{c}{x-\beta}$. En déduire une primitive de la fonction étudiée.

1°) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x}$ **2°)** $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ **3°)** $f(x) = \frac{2x^2+4x-5}{1-x^2}$

4°) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$ **5°)** $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-2x-8}$ **6°)** $f(x) = \frac{x^2}{x^2+x-12}$

EXERCICE 5

Soit $f : x \mapsto \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}$ et $g : x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$.

1°) Donner une primitive sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ de chacune des fonctions : $h_1 : x \mapsto f + g$ et $h_2 : x \mapsto f - g$.

2°) En déduire une primitive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ de chacune des fonctions f et g .

EXERCICE 6

A) On considère la fonction g définie de IR vers IR par $g(x) = x^3 - 3x - 3$

1) Etudier les variations de g sur $]0; +\infty[$.

2) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0; +\infty[$.

3) Etudier le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Vérifier que $\alpha \in \left]2;\frac{17}{8}\right[$.

B) On considère la fonction f de IR vers IR par : $f(x) = \ln(1+|x|) + \frac{3}{2x^2}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

1) Trouver l'ensemble de définition de f 2. Montrer que f est paire.

2) Justifier que l'étude de f peut être limité à l'intervalle $I =]0; +\infty[$.

3) Calculer les limites aux bornes de I.

4) Etudier la branche infinie en $+\infty$.

5) Etudier les variations de f sur I. En déduire que f admet un minimum relatif en α.

6)Tracer entièrement $(\mathcal{C}_f)$

EXERCICE 7

A) Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x} - 2 - \ln x$.

1) Etudier les variations de g .

2)Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0,+\infty[$ .Vérifier que $0,6 < \alpha < 0,7$.

3) En déduire le signe de $g(x)$.

B) Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}(1-x)(1+\ln x) & si \quad x\geq 1\\ (1-x)\ln(1-x) & si \quad x<1\end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2) Etudier la continuité de f en 1.

3) Etudier la dérivabilité de f en 1.

4) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition

5) Etudier les branches infinies de f .

6)Dresser le tableau de variations de f .

7) Tracer C_f dans un repère orthonormé unité 2cm

8) Soit h la restriction de f à l'ensemble $[1,+\infty[$

a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et les variations.

b) Résoudre $h^{-1}(x)=e$ puis calculer $\left(h^{-1}\right)'(2-2e)$.

c)Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère

EXERCICE 8

Soit I= $]0;+\infty[$, la fonction f définie sur I par $f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$, unité graphique 2 cm.

A Etude des variations de f.

1) **a)** calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.Qu'en déduisez-vous pour la courbe (C) ?

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2) Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que, pour tout x de I : $f'(x)=\frac{x^3+3-2\ln x}{2x^3}$.

3) soit u la fonction définie sur I par $u(x)=x^2+3-2\ln x$.

a) Etudier le sens de variation de u.

b) Déduisez-en, pour tout x de I, le signe de u(x).

4) Dresser le tableau de variation de f.

<u>B Tracée de la courbe (C)</u>

1) Pour tout x de I, on pose $\varphi(x)=f(x)-\frac{1}{2}x$. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi(x)$ .Qu'en déduisez-vous pour (C) ?

2) Soit (D) la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x$.

a) Montrer que (C) et (D) se coupent en un pont I dont vous donnerez les coordonnées.

b) Etudier la position relative de (C) et (D).

3)Tracer (C) et (D) sur le même graphique

EXERCICE 9

Soit f la fonction définie sur]0 ; + ∞[par $f(x)=\frac{1}{x}(x^2+1-\ln x)$ et (C) sa courbe représentative.

I- <u>Etude de *f* et construction de (C)</u>

1) Soit g la fonction définie par $g(x)=x^2+\ln x-2$.

a) Etudier les variations de g.

b) En déduire que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α tel que $1{,}30\leq\alpha\leq 1{,}35$.

c) Etudier le signe de $g(x)$.

2) **a)** Etudier les limites de f en 0 et $+\infty$.

b) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$. En déduire le sens de variation de f.

3) **a)** Préciser les coordonnées du point B intersection de (C) avec son asymptote oblique (Δ) et étudier leur position relative.

b) Construire (C) et (Δ) en précisant la tangente en B à (C). (unité graphique 2 cm).

II- <u>Approximation de α</u>

1) **a)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$ où h est la fonction définie sur $I = [1{,}30 ; 1{,}35]$ par $h(x) = \sqrt{2 - \ln x}$.

b) Justifier la décroissance de h sur I et montrer que pour tout $x \in I$, $h(x) \in I$.

c) Prouver que $\forall\, x \in I \;\; -\frac{1}{3} \leq h'(x) \leq 0$.

d) En déduire que $\forall\, x \in I$, $|h(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}\,|x - \alpha|$.

2) Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = h(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 1{,}30$.

a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|\,u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}\,|\,u_n - \alpha|$.

b) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|\,u_n - \alpha| \leq \frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

d) Préciser un entier n_0 tel que $|\,u_n - \alpha| \leq 10^{-6}$ et donner une valeur approchée de α à 10^{-6}