Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2019-2020 **Lycée :** Axlou Toth	**SÉRIE D'EXERCICES** **Limite et Continuité**	**Niveau** : TS2 **Professeur** : M. Diagne

EXERCICE 1 :

1) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{-x^2+5x-4}$; $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x^2-4}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+2x}$; $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+4x^2+2x-3}{x^2+5x-6}$; $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{6x^2+1}-5}{x+2}$;
$\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$; $\lim\limits_{x\to 2}\frac{8-x^3}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-2x+3+\sqrt{3}}{-x+\sqrt{3}}$

2) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x^2}{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}+2x}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+2}-1}$
$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}+x+2)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+x+1}-x+3)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x-2$
$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+4x\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x^3+1}}$;

3) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tanx}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx-tanx}{x^3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right)}{sinx}$; $\lim\limits_{x\to 1} tan\left[\left(\frac{x+1}{6x}\right)\frac{\pi}{2}\right]$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{12sinx-6}{4x-\pi}$;
$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2+2x-3}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin2x}{sin\pi x}$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tanx-1}{4x-\pi}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2x}{tan^2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+x}{cosx-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin^2 3x}{sin2x}$;
$\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{\sin(\pi x)}{x-1}\right]^2$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x[E(x)-x]}{|x|}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2-x^2\sin x$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2-\sin x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+\sin x}{4x+1}$;
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$

4) Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$, donner un encadrement à l'aide de fonctions affines et en déduire leurs en $-\infty\ et+\infty$.

1. $f: x\mapsto -x+2+\sin x$ 2. $f: x\mapsto \frac{3-2x}{3-\cos x}$

5) Calculer les limites suivantes en utilisant la composition des fonctions

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left[\left(\frac{x+1}{6x-\pi}\right)\pi\right]$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{2x^2}{x-1}}$;c) $\lim\limits_{x\to 1}\tan\left[\left(\frac{x+1}{6x}\right)\frac{\pi}{2}\right]$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} E(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{4x^2+1}}$ g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi x^2}{2x^2-3}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos^2\left(\frac{\pi x+1}{4x+\sqrt{x}}\right)$

EXERCICE 2 :

1. Sachant que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

a- On considère la fonction $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{x^2}$; Démontrer que $f(x) = \frac{2\sin^2 x}{x^2}$

Déterminer $\lim_{x\to 0} f(x)$

b- Déduire que $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = 2$.

c- Calculer alors $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}$

2. Démontrer que $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

3. En déduire les limites suivantes :

$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{1-\cos x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\cos x-1}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$ et $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$

EXERCICE 3 :

1. Démontrer que pour tout $x\epsilon\,[1;+\infty[$, $\frac{1}{2} \le \frac{x}{x+1} \le 1$

En déduire $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{x+1}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}$

2. On considère la fonction définie sur [2 ; +∞[par :

$f(x) = \frac{3x+\sin x}{x-1}$. Montrer que, pour tout $x \ge 2$, $|f(x) - 3| \le \frac{4}{x-1}$.

En déduire la limite de f en +∞.

3. Soit f la fonction définie : $h(x) = 3x + 2\sin x$

a- Montrer que pour tout x de ℝ : $3x - 2 \le h(x) \le 3x + 2$

b- En déduire $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} h(x)$

4. soit la fonction l définie sur ℝ par : $l(x) = \frac{1}{2-\cos x}$

a- Montrer que pour tout x réelle, $\frac{1}{3} \le l(x) \le 1$

b- En déduire les limites suivantes :

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2-\cos x}$; $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2-\cos x}$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\cos x}{2-\cos x}$

EXERCICE 4 :

1. Soit f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3+x} - \sqrt{x}$

   a. Montrer que $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3+x}+\sqrt{x}}$ puis qu'on a $\frac{3}{2\sqrt{3+x}} \le f(x) \le \frac{3}{2\sqrt{x}}$.

   b. En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement.

2. Soit h définie sur $]3;+\infty[$ par $h(x) = \frac{2x-\cos x}{-x+3}$

   a. Montrer que $\frac{2x+1}{-x+3} \le h(x) \le \frac{2x-1}{-x+3}$

   b. En déduire $\lim_{x\to+\infty} h(x)$

EXERCICE 5 :

Etudier la continuité en a des fonctions suivantes.

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+|x|}{x} & si\ x \ne 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ $a = 0$ 2) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & si\ x < 0 \\ \frac{x}{x^2+2x} & si\ x > 0 \\ \frac{1}{2} & si\ x = 0 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}\frac{x-\sqrt{|x|}}{x-1} & si\ x<1\\ xE\left(\frac{x}{2}\right) & si\ x\geq 1\end{cases}$ $a=1$ 4) $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x}{\sin x-1} & si\ \left]\frac{\pi}{2},\pi\right]\\ 0 & si\ x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ $a=\frac{\pi}{2}$

EXERCICE 6 :

Soit g la fonction définie par $g(x)=\begin{cases}E(x) & si\ x\epsilon[3;4[\\ -\frac{1}{4}x+4 & si\ \epsilon[4;+\infty[\end{cases}$

Etudier la continuité de g en 4 puis sur $[3;+\infty[$.

EXERCICE 7 :

1) La fonction f définie par : $f(x)=\frac{x^2-9}{|x|-3}$ est-elle prolongeable par continuité en -3 ? en 3 ? si oui donner le prolongement.
2) La fonction g définie par : $g(x)=\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}$ est-elle prolongeable par continuité en 1 ?

EXERCICE 8 :

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et calculer les limites aux bornes.

a) $\begin{cases}f(x)=\dfrac{x(x+2)}{x+1}; & si\,x>1\\ f(x)=x+\sqrt{|x^2-x|}\ ; & si\ \ x\leq 1\end{cases}$ b) $\begin{cases}f(x)=-x+2-\dfrac{2x}{x^2+1}; & si\ \ x\leq 1\\ f(x)=x-1-3\sqrt{x^2-1}; & si\ \ x>0\end{cases}$

c) $\begin{cases}f(x)=|x^2-2x|; & si\,x<0\\ f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{|x-1|}}; & si\,x\geq 0\end{cases}$ d) $\begin{cases}f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} & si\ \ x\neq 0\\ f(0)=1\end{cases}$

2) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation considérée est asymptote à la courbe de f au voisinage de infini

en $-\infty$ $y=-3x$: (Δ) $f(x)=2x-\sqrt{1+x^2}$ *

$f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sqrt{|x^2-1|}}{x}$ $(\Delta): y=\frac{x}{2}-1$ $en\ +\infty$ *

b) Déterminer les branches infinies à la courbe de la fonction f.

$f(x)=\dfrac{x^3-x^2-2x-1}{(x+1)^2}$; $f(x)=\sqrt{x^2+2x}$ *

Pensée :

« Soyez un élément de qualité. Certaines personnes ne sont pas habituées à un environnement où l'on attend l'Excellence » Steve Jobs