Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2019-2020 **Lycée :** CDM (Saint-Louis)	**SÉRIE D'EXERCICES** **LN-EXPO**	**Niveau** : TS1 **Professeur** : M. DiamBa

Exercice 1 :

Résoudre dans ℝ :

$\boldsymbol{a})\ \ln(x^4+4)=2\ln\left(-x\sqrt{5}\right)$ $\quad\boldsymbol{b})\ \ln\left(\sqrt{2x-3}\right)=\ln(6-x)-\dfrac{1}{2}\ln x$

$\boldsymbol{c})\ \ln^2 x=\ \ln x^2$ $\quad\boldsymbol{d})\ (x^2-1)\ln x=0$ $\quad\boldsymbol{e})\ \ln|x^3-x^2|=\ln|x-1|+\ln|20-x|$

$\boldsymbol{f})\ \dfrac{\ln|x-3|}{\ln|2x+1|}=\dfrac{\ln|2x+1|}{\ln|x-3|}$ $\quad\boldsymbol{g})\ \ln[\ln(x-1)(x^2-x-1)]=\ln[\ln(8x+1)]$

$\boldsymbol{h})\ \ln^3 x-4\ln^2 x+\ln x+6=0$ $\quad\boldsymbol{i})\ \ln(x+3)>\ln(x^2+2x-3)-\ln x$

$\boldsymbol{j})\ \ln\left(\dfrac{2x-3}{5x+1}\right)\leq \mathbf{0}$ $\quad\boldsymbol{k})\ \ln x+\dfrac{1}{\ln x}<\dfrac{3}{2}$ $\quad\boldsymbol{l})\ 2\ln^2 2x-5\ln 2x+3\leq 0$

$\boldsymbol{m})\ x\ln|x|<0$ $\quad\boldsymbol{n})\ \ln(x-mx)+m=0$ $\quad\boldsymbol{o})\ \log_2 x\times\log_3 x=3$

$\boldsymbol{p})\ \log(x^2-1)+\log 4=\log(4x-1)$ $\quad\boldsymbol{q})\ \log_a x=\log_x a\ \ (a>0\ et\ a\neq 1)$

$\boldsymbol{r})\ 2\ln(x+m)=\ln(2m-3x)$ $\ (\boldsymbol{discuter\ suivant\ m})$

Exercice 2 :

Résoudre dans ℝ :

$a)\ e^{\sqrt{x+1}}=e^{x-1}$ $\quad b)\ 8^{3x}=4$ $\quad c)\ e^{4x}-3e^{2x}-4=0$ $\quad d)\ e^{2x}-5e^x-6=0$

$e)\ 3^{x+2}+9^{x+1}-1458=0$ $\quad f)\ 8^{6x}-3.8^{3x}-4=0$ $\quad g)\ 2^{x+1}=3^x$ $\quad h)\ 5^x=2^{x^3}$

$i)\ x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^{\,x}$ $\quad j)\ x^{x^2}=(x^2)^x$ $\quad k)\ \ln\left(e^{x^2-1}-e^{1-x^2}\right)>\dfrac{2}{5}$ $\quad (poser\ X=e^{x^2-1})$

$l)\ (m+1)2^x+(m-1)2^{-x}=0$ $\quad (dicuter\ suivant\ m)$

Exercice 3 :

Résoudre dans ℝ² :

$\boldsymbol{a})\begin{cases} x+y=13\\ \ln x+\ln y=\ln 36\end{cases}$ $\quad\boldsymbol{b})\begin{cases} x^2+y^2=169\\ \ln x+\ln y=\ln 60\end{cases}$ $\quad\boldsymbol{c})\begin{cases} 2\ln(x-2)-\ln(y-1)=4\\ \ln(x-2)+3\ln(y-1)=9\end{cases}$

$\boldsymbol{d})\begin{cases} \ln x^4+\ln y^5=32\\ \ln x^6-\ln y^7=-39\end{cases}$ $\quad\boldsymbol{e})\begin{cases} \ln x\,.\ln\left(\dfrac{x}{2y}\right)=7\\ \ln x-\ln y=4\end{cases}$ $\quad\boldsymbol{f})\begin{cases} \ln\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)=9\\ \ln(xy^5)=-\dfrac{17}{2}\end{cases}$ $\quad g)\begin{cases} 2^{x+y}=4\\ 2^x+2^y=\sqrt{18}\end{cases}$

$\boldsymbol{h})\begin{cases} e^xe^y=10\\ e^{x-y}=\dfrac{2}{5}\end{cases}$ $\quad\boldsymbol{i})\begin{cases} e^x-2e^y=-5\\ 3e^x+e^y=13\end{cases}$

Exercice 4 :

Soit l'équation d'inconnue $x\geq 0$: $\ 2^x+3^x+4^x=5^x$.

1.) Etudier les variations de la fonction f définie sur [0 ;+∞[par

$$f(x)=\left(\tfrac{2}{5}\right)^x+\left(\tfrac{3}{5}\right)^x+\left(\tfrac{4}{5}\right)^x-1.$$

2.) En déduire que l'équation proposée admet une unique solution α positive.

3.) Résoudre l'équation $\ x^{1/4}+2x^{5/3}-3=0$.

Exercice 5 :

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ ***b***) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$ ***c***) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+3)-\ln(x-5)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+3)}{\ln(x-5)}$ ***e***) $\lim\limits_{x\to0}\ln x\ln(x+1)$ ***f***) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\ln x-2}{2\ln x-3}$

g) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{x-1}$ ***h***) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$ ***i***) $\lim\limits_{x\to2}(x-2)\ln\dfrac{x+1}{(x-2)^2}$

j) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+kx)}{x}\ (k\neq0)$ ***k***) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ***l***) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}\ln x$ ***m***) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}}$

n) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}\ln^3 x$ ***o***) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-\ln x^6$ ***p***) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ ***q***) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$

Exercice 6 :

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}-e^x$ ***b***) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}-e^x$ ***c***) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{\sqrt[3]{x}}$ ***d***) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x$ ***e***) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt[4]{x}}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5e^x-1}{3e^x+2}$ ***g***) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\sqrt{x+1}}-e^{\sqrt{x}}$ ***h***) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{\ln(x^3+1)}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{1+x}}-e^{\frac{1}{x}}\right)$ ***j***) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2^x}{x^x-2^2}$ ***k***) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ ***l***) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty}(a^x+b^x)^{1/x}\ (a>0, b>0)$ ***n***) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^x}{3^x}$

Exercice 7 :

1.) Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer un intervalle sur lequel la fonction est continue et en donner une primitive sur cet intervalle :

a) $f(x)=\sin 2x\,.\,e^{\cos^2 x}$ ***b***) $f(x)=3^{-2x+1}$ ***c***) $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ ***d***) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+3}$

e) $f(x)=\frac{\sin a}{\cos^2 x}e^{\tan x}\ (\sin a\neq0)$ ***f***) $f(x)=\frac{1+e^{2x}}{2x+e^{2x}}$

2.) Déterminer les réels α et β annulant le dénominateur et décomposer *f(x)* sous la forme $f(x)=a+\frac{b}{x-\alpha}+\frac{c}{x-\beta}$ puis en déduire une primitive de *f*.

a) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}$ ***b***) $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x^2-x}$ ***c***) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+x-12}$

Exercice 8 :

Etudier et représenter graphiquement la fonction *f*.

a) $f(x)=x-\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)$ ***b***) $f(x)=\frac{1+\ln^2 x}{1-\ln^2 x}$ ***c***) $f(x)=\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

d) $f(x)=\ln(\ln x)$ ***e***) $f(x)=\frac{\ln x}{x}+x$ ***f***) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

g) $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ ***h***) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ ***i***) $f(x)=\frac{x}{1+e^{-x}}$

k) $f(x)=\ln\left(\frac{e^{2x}+5}{e^x-2}\right)$ ***j***) $f(x)=x-\exp\left(-\frac{x}{2}\right)$

Exercice 9 :

Soit la fonction *f* définie par $\begin{cases} f(x)=\left|\frac{x-1}{x}\right|^{1/\sqrt{2}} & si \quad x\neq1 \\ f(1)=0 \end{cases}$

1.) Etudier la continuité et la dérivabilité de *f* en 1.

2.) Etudier *f* et tracer sa courbe représentative.

Exercice 10 :

1.) Soit f un polynôme de degré $n \geq 0$: $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_0 \neq 0)$.
Montrer que $x^{-n} f(x)$ a une limite non nulle en $+\infty$.

2.) On suppose qu'il existe deux polynômes P et Q tels que, pour tout $x > 0$,
$\ln x = \frac{P(x)}{Q(x)}$. On note d°P = p et d°Q = q.

a-) Montrer que $x^{q-p} \ln x$ admet alors une limite non nulle en $+\infty$.

b-) En comparant avec les résultats sur $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha \ln x = +\infty$ (α réel), en déduire que ln n'est pas une fonction rationnelle.

Exercice 11 :

1.) a-) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$.

b-) Soit $f : x \mapsto (x^2 + x + 1)e^{-x}$. Etudier f et tracer sa courbe (C_f).

2.) a-) Soit $g_m : x \mapsto (x^2 + mx + 1)e^{-x}$, de courbe (C_m) ; m paramètre réel. Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées.

b-) Etudier la position relative de (C_m) et (C_f) suivant les valeurs de m.

c-) Montrer que pour tout $m \neq 0$, g_m admet deux extrema en $x_1 = 1$ et $x_2 = 1 - m$.

d-) Montrer que quand m varie dans $\mathbb{R}^*$, les points de coordonnées $(1 - m, g_m(1 - m))$ appartiennent à une courbe dont on précisera l'équation.

Exercice 12 :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $f_a(x) = \ln(1 + ax)$. On note (C_a) la courbe de f_a.

1.) Indiquer le domaine de définition D_a de f_a selon les valeurs de a.

2.) a-) Quelle est la transformation transformant (C_a) en (C_{-a}) ?

b-) Soit (Γ) la courbe de ln. Démontrer que lorsque $a > 0$, (C_a) est l'image de (Γ) par la translation de vecteur $\vec{u} = -\frac{1}{a}\vec{\imath} + \ln a\,\vec{\jmath}$.

3.) Etudier les variations de f_a selon les valeurs de a.

4.) Montrer que toutes les courbes (C_a) passent par un point fixe O. Donner une équation de la tangente en O à (C_a).

5.) Tracer dans un même repère $(C_{1/2})$ et (C_1).

Exercice 13 :

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, $\forall\, n \geq 1$ et (V_n) la suite définie par $V_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$, $\forall\, n \geq 1$.

1.) Calculer U_1, U_2, U_3, V_1, V_2 et V_3.

2.) A l'aide des accroissements finis, démontrer que : $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$.

3.) En déduire que : $\forall\, n \geq 1$, $U_n \geq \ln(n+1)$. Quelle est la limite de (U_n) ?

4.) Montrer que : $\forall\, x \in]0,1[$, $\ln(1 + x) < x < -\ln(1 - x)$.

5.) Montrer que : $\forall\, n \geq 2$, $\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) < V_n < \ln\left(2 + \frac{2}{n-1}\right)$.

6.) En déduire la limite de la suite (V_n).

Exercice 14 :

On considère la fonction f_m définie par $f_m(x) = mx - 1 - \ln x$, où m est un paramètre réel strictement positif.

1.) Etudier les variations de f_m.

2.) Démontrer que : $\forall\, x > 0$, $\ln x \leq x - 1$. [2]

3.) On donne un entier naturel $n \geq 2$ et n nombres strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$. On note M la moyenne arithmétique de ces nombres, G = $\sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n}$ la moyenne géométrique et H la moyenne harmonique, à savoir $\frac{n}{H} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}$.

a-) Démontrer que $G \leq M$ (on pourra appliquer [2] avec $x = \frac{a_i}{M}$).

b-) Comparer G et H.