Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2015-2016 **Lycée :** Kébémer (LOUGA)	**SÉRIE D'EXERCICES** **Fonctions Numériques**	**Niveau** : TERMINALE S2 **Professeur** : M. KEBE

EXERCICE 1 :

1°) Déterminer (si possible) la limite pour $x \to +\infty$, et pour $x \to -\infty$, de la fonction f, dans les cas suivants :

a) $f : x \mapsto x^2 - 3x + 1$ **b)** $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - x}{x + 3}$ c) $f : x \mapsto \dfrac{x + 1}{x^2 + 2}$ **d)** $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - 3x}{x^3 + x + 2}$

e) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$

2°) Soient a et b deux paramètres réels .On définit la fonction f par $f(x) = ax + b$ si $x \leq 3$ et $f(x)= \sqrt{2x + 3} - 3$ si $x > 3$ .Déterminer a et b pour que f soit continue et dérivable en $x_0 = 3$

3) Utiliser le résultat $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ pour étudier la limite éventuelle en 0 des fonctions suivantes :

a°) $f : x \mapsto \dfrac{\sin 5x}{2x}$ b°) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sin 3x}$ c°) $f : x \mapsto \dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$ d°) $f : x \mapsto \dfrac{\tan x}{x}$ e°) $\dfrac{\tan 2x}{\sin x}$

f°) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ g°) $f : x \mapsto \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ **h°)** $f : x \mapsto \dfrac{\sin x - x}{\cos x - 1}$

EXERCICE 2 :

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1°) $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 3x - 4}{x - 1}$ en 1, $-\infty$, $+\infty$ 2°) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 8}$ en -2 , $-\infty$, $+\infty$

3°) $f : x \mapsto \sqrt{1 + x^2} - x$ en $-\infty$, $+\infty$ 4°) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{3 + x} - 2x}{x - 1}$ en 1, $+\infty$

5°) $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 6x + 7}{3x^2 - x - 4}$ en -1, $-\infty$, $+\infty$ 6°) $f : x \mapsto \sqrt{1 + x} - x$ en $+\infty$

7°) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$ en 1, $+\infty$ 8°) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2\sqrt{x - 2}}{x - 3}$ en 3, $+\infty$

9°) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{3x + 2} - \sqrt{11x - 6}}{x - \sqrt{x + 3} + 1}$ en 1 10°) $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2 + x + 3} - 3}{x^2 + x - 6}$ en 2

EXERCICE 3 :

On considère la fonction suivante définie par : $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 3x}{x - 1}$.

1°) Déterminer le domaine de définition de f, puis calculer les limites aux bornes de D_f ; préciser les asymptotes.

2°) Trouver les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

En déduire que la droite D d'équation, $y = -2x + 1$ est asymptote oblique à la courbe de f.
Donner la position relative de D et C .
3°) Montrer que le point I d'intersection de D et de l'asymptote verticale est centre de symétrie à C .
4°) Etudier les variations de f, dresser le tableau de variation de f et construire C .
5°) Déduire du graphique précédent la courbe représentative de la fonction g définie par :
$g(x) = |f(x)|$ pour tout $x \neq 1$

EXERCICE 4 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 2}$

1°) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.
b) Déterminer les limites aux bornes de D_f. En déduire que C_f admet une asymptote verticale.

2°) a) Montrer qu'il existe des réels a et b tels que $f(x) = ax + \dfrac{b}{x+2}$.

En déduire que la droite Δ d'équation , $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de f.
b) Etudier la position relative de C_f et Δ.
3°) Etudier les variations de f. Dresser le tableau de variation de f.
4°) Montrer que le point $I(-2 ; -2)$ est centre de symétrie à C_f.
5°) Soit A le point d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées ; donner l'équation de la tangente T_A au point A.
6°) Construire la courbe C_f dans un repère orthonormé (O, I, J).
7°) Expliquer comment, puis effectuer la construction de la fonction g définie par :
$g(x) = |f(x)|$ pour tout $x \neq 2$

EXERCICE 5 :

1°) Soit g la fonction définie par : $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.
a) Etudier les variations de g. **b)** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \,]-2; -1{,}5[$; en déduire le signe de g.

2°) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x^3}$

a) Déterminer D_f et les limites aux bornes de D_f. Préciser les asymptotes.
b) Etablir le tableau de variation de f.
c) Soit h la restriction de f sur $]1 ; +\infty[$, montrer que h permet de définir une bijection de $]1 ; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser.
d) Calculer h(2) ; en déduire $\left(h^{-1}\right)'\left(-\dfrac{3}{7}\right)$.

e) Construire la courbe de f et la courbe de h^{-1} dans un même repère

EXERCICE 6 :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x(x-2)}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$(unité : 1 cm)

1°) a) Déterminer D_f et calculer les limites de f aux bornes de D_f .

b) Etudier la continuité de f en 0

c) Etudier la dérivabilité de f en $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ .Que peut-on en déduire pour C_f aux points d'abscisses 0 et 1 ? d) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et calculer $f'(x)$ dans les intervalles où f est dérivable .

e) Résoudre dans $]0 ;1[$ l'inéquation : $2\sqrt{x - x^2} + 1 - 2x \leq 0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0 ;1[$ puis étudier son signe sur les autres intervalles . Dresser le tableau de variation de f .

2°) **a)** Montrer que C_f admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$. Etudier la position relative de C_f et Δ sur $]1 ; +\infty[$.

b) Montrer que C_f admet une asymptote oblique D en $-\infty$. Etudier la position relative de C_f et D sur $]-\infty ; 0[$.

3°) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1 ; +\infty[$.

a) Montrer que g définit une bijection de $I =]1 ; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser .

b) La bijection réciproque g^{-1} est-elle dérivable sur J ? Calculer $g^{-1\prime}(2)$.

c) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

4°) Construire C_f , ainsi que $C_{g^{-1}}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

EXERCICE 7 :

Soit la fonction f définie par $f : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$.

1°) Déterminer sa fonction dérivée première et vérifier la relation : $2f'(x)\sqrt{1 + x^2} = f(x)$.

2°) En déduire que la dérivée seconde vérifie la relation :

$$4f''(x)(1 + x^2) + 4x f'(x) - f(x) = 0 .$$

EXERCICE 8:

On pose : $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$

1°) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2°) Etudier le signe de $f''(x)$. En déduire le sens de variation de f' .

3°) Calculer $f'(0)$. En déduire le signe de $f'(x)$.

4°) En déduire le sens de variation de f , puis le signe de f (x) .

5°) On pose : $g(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24}$.

S'inspirer de ce qui précède pour étudier le signe de $g'(x)$, puis celui de g (x) .

6°) Utiliser ce qui précède pour encadrer cos x par des fonctions paires .

7°) Déduire du 6° la limite en 0 de $\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$

EXERCICE 9

Soit f la fonction définie par :

$f(x) = 2x^2 + 2x - 3$ et C sa représentation graphique.

1°) Etudier f et en faire la représentation graphique.

2°) On désigne par g la restriction de f à $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$. Montrer que g est une bijection de $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ vers $\left[-\frac{7}{2},+\infty\right[$.

3°) Soit g^{-1} la bijection réciproque et C^{-1} sa représentation graphique.

a) Tracer C^{-1} sans déterminer g^{-1}.

b) Déterminer une équation de la tangente à C^{-1} au point A d'abscisse 9.

c) Déterminer g^{-1} en donnant l'ensemble de départ, l'ensemble d'arrivée et l'image d'un élément x.

d) Déterminer $(g^{-1})'$ et retrouver une équation de la tangente à C^{-1} au point d'abscisse 9.

EXERCICE 10 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$.

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1°) Etudier la continuité de f .

2°) Etudier la dérivabilité de f . Calculer sa dérivée sur chaque intervalle où f est dérivable .

3°) Démontrer les équivalences :

$$\sqrt{4x^2-1} + 4x < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right] \text{ et } \sqrt{1-4x^2} - 4x > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2\sqrt{5}}\right] .$$

En déduire le signe de f ' (x) .

4°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f$. Dresser le tableau de variation de f .

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + x]$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - 3x]$.

En déduire que C admet deux asymptotes, d'équations $y = -x$ et $y = 3x$.

Tracer la courbe C .

5°) a) Soit h la restriction de f à $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right]$. Démontrer que h admet une réciproque h^{-1} .

En préciser l'ensemble de définition et la variation .

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} [x + h^{-1}(x)]$. En déduire que C et Γ , courbe représentative de h^{-1} , ont une asymptote commune . Tracer Γ .

c) Calculer $h^{-1}(0)$. Déterminer une équation de la tangente à Γ au point de coordonnées $(0 ; h^{-1}(0))$.

EXERCICE 11 : *(d'après le problème du Bac D 1987)*

Soit la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Partie A .

1°) Déterminer le domaine de définition de f . On le notera D_f .

2°) Montrer que, pour tout $x \in D_f$, on a $f(x) > 0$.

3°) Etudier la parité de f . Que peut-on en déduire pour C_f courbe représentative de f dans un repère orthonormé ?

4°) Calculer f ' (x) puis étudier le signe de f ' (x) pour x > 1 .

En déduire le tableau de variation de f pour x > 1 . Construire C_f .

Partie B .

La fonction numérique g est définie par : $g(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$.

1°) Donner l'ensemble de définition de g .

2°) Etudier la parité de g .
3°) La droite (D) a pour équation y = x . Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (D) et de la courbe représentative de g .
4°) Calculer g ' (x) et exprimer g ' (x) en fonction de f (x) de A) .
5°) Soit h la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par h(x) = g (x) .
  a) Donner le tableau de variation de h .
  b) Montrer que h est une bijection de $]1\,;+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera .
  c) Tracer la courbe représentative de h .
  d) Tracer la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère.

EXERCICE 12 :

Soit f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x$.
1°) Déterminer le domaine de définition de f.
2°) Calculer la dérivée f '(x) et étudier son signe.
2°) Etudier la dérivabilité de f en -2 et en 2 ; interpréter géométriquement les résultats obtenus.
3°) Déterminer le tableau de variation de f.
4°) Etudier les branches infinies de C_f, puis construire C_f .
5°) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[2\,;+\infty[$. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}. Construire C_g et $C_{g^{-1}}$ dans un même repère orthonormé.
6°) Calculer $g^{-1}(2)$; $g^{-1}(-1)$; $g^{-1\,\prime}(-1)$.
7°) Déterminer l'expression de $g^{-1}(x)$.

EXERCICE 13 :

Soit f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \dfrac{x}{x^2+1} - x \quad si \quad x \leq 0 \\ f_2(x) = \sqrt{x^2+2x} + x \quad si \quad x \succ 0 \end{cases}$$

1°) f est-elle continue en $x_0 = 0$?
2°) a) Calculer la dérivée f '(x).
  b) f est-elle dérivable en $x_0 = 0$?
3°) Etudier les variations de f.
4°) Etudier les branches infinies de C_f.
5°) Préciser la position de C_f par rapport à ses asymptotes.
6°) Etudier les points d'inflexion et la concavité de C_f.
7°) Pour $x \in]-\infty\,; 0]$, déterminer le point où C_f admet une tangente de coefficient directeur -1.
8°) Construire C_f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
9°) Montrer que f_1 admet une fonction réciproque f_1^{-1}.
Construire $C\,f_1$ et $C\,f_1^{-1}$ dans un même repère orthonormé et préciser le point d'inflexion de $C\,f_1^{-1}$ ainsi que son asymptote. Calculer enfin le nombre dérivé de f_1^{-1} en $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $f_1^{-1\,\prime}\left(\frac{1}{2}\right)$.

10°) Montrer que f_2 admet une fonction réciproque f_2^{-1}. Déterminer l'expression de $f_2^{-1}(x)$.

EXERCICE 14 :

Soit f définie par : $f(x) = x\sqrt{x^2 - 2x}$.

1°) Déterminer D_f et calculer $f'(x)$.

2°) Etudier la dérivabilité de f en 0 et en 2; interpréter géométriquement chaque résultat.

3°) Déterminer le tableau de variation de f.

4°) Etudier les branches infinies de C_f.

5°) Préciser les points d'intersection de C_f et de la droite d'équation y = x. Construire la courbe C_f.

6°) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty ; 0]$

Montrer que g est une bijection de $]-\infty ; 0]$ sur un intervalle que l'on déterminera. Soit g^{-1} la fonction réciproque de g.

a réciproque de g.

a) Donner les valeurs de $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1-\sqrt{2})$.

b) Construire C_g et $C_{g^{-1}}$ dans un même repère orthonormé.

7°) Soit $h(x) = x^4 - 2x^3 - 3$. Calculer $h(-1)$.

En déduire les valeurs de $g^{-1}(\sqrt{3})$ et $g^{-1}{}'(\sqrt{3})$.

EXERCICE 15 :

(on donne $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 2$ cm)

1°) Soit $g(x) = 3\cos^2 x - 1$. Etudier les variations de g sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$. En déduire que g s'annule en $x_0 \in \left] \frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{3} \right[$ .En déduire enfin le signe de g(x) sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

2°) Soit $f(x) = 3\sin^2 x \cos x$. Démontrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.

3°) Montrer que : $\forall x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = 3\sin x\,(3\cos^2 x - 1)$.

4°) Déterminer la valeur de $f(x_0)$ avec x_0 définie déjà définie en 1°.

5°) Représenter graphiquement f sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$. Compléter C_f sur $[-\pi ; \pi]$ en expliquant les opérations et les transformations utilisées.

6°) Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$. En déduire l'aire du domaine plan limité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = π.

EXERCICE 16 :

Soit f définie par : $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x - 1$

1°) Montrer qu'il suffit f sur l'intervalle $D_E = [-\pi ; \pi]$.

2°) Etudier le signe de $g(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$ sur D_E .

3°) Etudier les variations de f sur D_E .

4°) Calculer $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, $f'\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

5°) Déterminer les équations des tangentes à C_f aux points

$A\left(-\frac{\pi}{6}, -1\right)$ et $B\left(-\frac{5\pi}{6}, -1\right)$.

6°) Etudier sur D_E les points d'inflexion et la concavité de C_f .

7°) Résoudre sur D_E l'équation $f(x) = 0$. Conclusion ?

8°) Construire C_f pour $x \in D_E$