Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2018-2019 **Lycée :** CDM (Saint-Louis)	**SÉRIE D'EXERCICES** **Etudes de Fonctions**	**Niveau** : TS1 **Professeur** : M. DiamBa

EXERCICE 1:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \sqrt{|4x^2 - 1|}$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f. Calculer sa fontion dérivée.

2) Démontrer les équivalences suivantes : $\sqrt{4x^2 - 1} + 4x < 0 \Leftrightarrow x \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right]$ et $\sqrt{1 - 4x^2} - 4x > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2\sqrt{5}}\right]$.En déduire le signe de $f'(x)$.

3) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Dresser le tableau de variation de f.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + x]$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 3x]$. En déduire que (C) admet deux asymptotes d'équations y = -x et y = 3x. Tracer (C).

4) a) Soit h la restriction de f à $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right]$. Démontrer que h admet une réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et la variation. On note (Γ) la courbe de h^{-1}.
b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [x + h^{-1}(x)]$. En déduire que (C) et (Γ) ont une asymptote commune. Tracer (Γ). Déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point de coordonnées $(0\,;\,h^{-1}(0))$.

EXERCICE 2 :

A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$\{-2} par : $f(x) = \frac{1 - x^2}{2 + x}$.
1) Vérifiez que pour tout réel $x \neq -2$, $f(x) = -x + 2 - \frac{3}{x+2}$.
2) Etudiez la fonction f. Démontrez que sa courbe (C) admet un centre de symétrie.
B. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \frac{1 - \sin^2 t}{2 + \sin t}$
1) Comparez pour tout réel t : $\varphi(\pi - t)$ et $\varphi(t)$. Expliquez comment l'étude du sens de variation de la restriction de φ à $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ permet de construire la courbe représentative de φ. 2) Le but de cette question est de prouver que l'équation $\varphi'(t) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.
a) Montrez que la dérivée f' de f est strictement décroissante sur [-1 ; 1]. Quelle est l'image de [-1 ; 1] par f' ?
b) Prouvez que φ est dérivable et exprimez φ' en fonction de f'. Prouvez l'existence et l'unicité de α. Calculez la valeur exacte de $\varphi(\alpha)$.

3) Calculez les valeurs exactes de : $\varphi(0),\ \varphi\left(\frac{\pi}{6}\right),\ \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right),\ \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)\ et\ \varphi'(0).$

4) Etudiez le sens de variation de la restriction de φ à $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$. Tracez la courbe représentative de φ dans un repère orthonormal **(unité : 3cm).**

pour tous réels x et y positifs, on a :

$$x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\,y - f(x)][\,y - g^{-1}(x)] = 0.$$

En déduire que (Γ) = (E).
b) Démontrer que si un point M(a, b) appartient à (Γ) alors le point M'(b, a) appartient également à (Γ).
En déduire que la courbe (Γ) admet un axe de symétrie. Préciser cet axe.

EXERCICE 4 :

A) On considère la fonction φ définie sur ℝ+ par : $\varphi(x) = \dfrac{2x}{1 + x^4}$.

1°) Etudier φ sur [0,1], en déduire que $\dfrac{6}{5}$ majore φ sur cet intervalle.

2°) Prouver que, pour tout x ∈ [1 ; + ∞ [, $\varphi(x) < \dfrac{2}{x^3}$.

3°) Soit f une fonction définie sur ℝ+ et telle que : f(0) = 0 et f '(x) = φ(x).
a) Déduire des questions précédentes une majoration de f(1) et une autre de la fonction f sur [1 ; + ∞ [par une fonction g.
Indication : *Appliquer l'inégalité des Accroissements Finis à la fonction f sur l'intervalle [0 , x].*
3°) Montrer que f admet une limite finie *l* en + ∞. Préciser un encadrement de *l* .

B) Soit α la fonction définie ainsi : $\alpha : \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R},\quad x \mapsto \sqrt{\tan x}$

1°) Etudier la dérivabilité de α en chacun des points de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Montrer que $\forall\, x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[,\ \alpha'(x) = \dfrac{1 + [\alpha(x)]^4}{2\,\alpha(x)}$

2°) Etudier les variations de α et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
3°) Montrer que α admet une fonction réciproque α^{-1} ; préciser les propriétés de α^{-1} (ensemble de définition, de continuité, de dérivabilité, sens de variation) ; donner la valeur exacte de $\alpha^{-1}{}'(1)$.

4°) Soit β = f ∘ α. Montrer que β est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et que β '(x)= 1 pour tout x ∈ $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

En déduire que α^{-1} = f. Donner alors la valeur exacte de $\lim\limits_{+\infty} f$.

5°) Construire dans le repère du 2° la courbe de f.

EXERCICE 5 :

PARTIE I Soit la fonction f définie sur par : $f(x) = -1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1°) Etudier les variations de f.

2°) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $\left]-1,1\right[$ une solution unique α tel que $\alpha > \dfrac{4}{5}$.

3°) En déduire le signe de f(x) – x.

4°) Montrer que f réalise une bijection de $\left]-1,1\right[$ sur IR.

5°) Montrer que pour tout x de IR on a : $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$

PARTIE II : Soit la fonction h définie sur $\left]-1,1\right[$ par : $h(x) = f(-\sin(\frac{\pi}{2}x))$

1°) Montrer que pour tout x de $\left]-1,1\right[$: $h(x) = -1 - \tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

2°) Montrer que h établit une bijection de $\left]-1,1\right[$ sur IR.

3°) Montrer que h^{-1} est dérivable sur IR et que $(h^{-1})'(x) = \dfrac{-2}{\pi\left(1+(x+1)^2\right)}$

4°) Soit pour tout x de IR* la fonction H telle que : $H(x) = h^{-1}(x-1) + h^{-1}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$.

a- Montrer que H est dérivable sur IR et déterminer H ' (x).

b- Calculer $H\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $H\left(-\dfrac{1}{2}\right)$. En déduire que : $\begin{cases} H(x) = -1 \text{ , } si\ x > 0 \\ H(x) = 1 \text{ , } si\ x < 0 \end{cases}$

5°) Pour tout n de IN on a : $v_n = \sum_{k=1}^{n}[h^{-1}\left(\dfrac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\dfrac{1}{k}\right)]$ et $w_n = \dfrac{v_n}{n}$

a- Donner la valeur de $H\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$. En déduire que : ∀ k ∈ IN * :

$$h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) = -1.$$

b- Montrer que pour tout n de IN* : $v_n = n - h^{-1}\left(-\dfrac{1}{n+1}\right)$.En déduire que la suite w est convergente et donner sa limite.

EXERCICE 6 :

Soit f_0 la fonction définie sur]-∞ ; 1] par $f_0 = \sqrt{1-x}$. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, f_n est la fonction définie sur]-∞ ; 1] par $f_n = x^n\sqrt{1-x}$.

A.1) Dresser le tableau de variation de f_n pour $n \geq 1$, en distinguant les cas : n pair et n impair. Déterminer l'unique élément $\alpha_n \in]0\,;1[$ $tel\ que :\ f_n'(\alpha_n) = 0\ ,\ n \geq 1$.

2) Représenter dans un même repère orthonormal les fonctions f_0, f_1, f_2.

B.1) Déterminer graphiquement, selon les valeurs du réel k, le nombre de solutions de l'équation $f_1(x) = k$.

2) Montrer que l'équation $\left|x\sqrt{1-x}\right| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ admet trois solutions x_1 , x_2 , x_3 vérifiant :

$$-\frac{1}{3} < x_1 < 0 \quad ; \quad 0 < x_2 < \frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{2}{3} < x_3 < 1.$$

3) Pour $i \in \{1\,;2\,;3\}$, on pose alors : $u_i = \frac{3}{2}\left(x_i - \frac{1}{3}\right)$.

Montrer qu'il existe un unique réel $\theta_i \in [0\,;\pi]$ *tel que* : $u_i = \cos\theta_i$.

4) Montrer que θ_1 , θ_2 *et* θ_3 sont les solutions de l'équation : $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$ avec $\theta \in [0\,;\pi]$.

5) Donner alors une valeur approchée à 10^{-5} prés de x_1 , x_2 *et* x_3.

EXERCICE 7 :

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f définie par :

(i) $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)f(y)$

(ii) $f(1) = a$

1. Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que pour tous réels x et y : $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ *et* $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$.
3. a) Montrer, par récurrence sur n$\in \mathbb{N}^*$, que pour tout réel x : $f(nx) = [f(x)]^n$.

   b) En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt[n]{f(x)}$.

   c) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{Z}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(nx) = [f(x)]^n$.

   d) Montrer que : $\forall\, r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = a^r$.
4. Montrer que si f est continue en 0 alors elle est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que si f est dérivable en 0 alors elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.