Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2018-2019 Lycée : CDM (Saint-Louis)	SÉRIE D'EXERCICES Equations différentielles	Niveau : TS1 Professeur : M. DiamBa

Exercice 1 : *Équation du type : $y' = ay + b$ (a et b sont deux réels avec $a \neq 0$)*

Montrer que f est une solution de (E) : $y' = ay + b$ si et seulement si $f + \frac{b}{a}$ est une solution de (E_0) : $y' = ay$.
Résoudre (E_0) puis en déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2: *Du double au triple*

Une grandeur (non nulle) y évolue à une vitesse proportionnelle à elle-même. On sait que cette grandeur double tous les dix ans. Combien de temps lui faut-il pour tripler ?

Exercice 3 : *Loi de refroidissement de Newton*

La loi de refroidissement de Newton s'énonce ainsi :

"la vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre le milieu ambiant et ce corps ".

On suppose que la température de l'air ambiant est constante égale à 25°C.
Dans ces conditions, la température d'un corps passe de 100°C à 70°C en 15 minutes.
Au bout de combien de temps se trouvera-t-il à 40°C ?

Exercice 4 : *Taux d'alcoolémie*

Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (en g/L) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie, sur $\mathbb{R}_+$, l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = a\,e^{-t},$$

où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures), et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.

1. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $g(t) = f(t)\,e^{t}$.
Démontrer que g est une fonction affine.

2. Exprimer $f(t)$ en fonction de t et de a.

3. Dans cette question, on suppose que $a = 5$.

a. Étudier les variations de f et tracer sa courbe.
Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.

b. Donner une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à 0,5 g/L.

Exercice 5 : *Modèle de Verhulst - Loi logistique continue*

On repique des plantes de 10 cm de haut sous une serre. On sait que la taille maximale de ces plantes est de 1 m.
On note $f(t)$ la taille, en m, d'une plante après t jours. (On a donc $f(0) = 0{,}1$).
Le modèle de Verhulst consiste à considérer que la vitesse de croissance de la plante évolue suivant la relation $f'(t) = a\,f(t)\,[1 - f(t)]$, où a est une constante dépendant des conditions expérimentales
Autrement dit, f est une solution, sur $\mathbb{R}_+$, de l'équation différentielle : $y' = a\,y\,(1 - y)$

1. On pose, pour tout t de $\mathbb{R}_+$: $z(t) = \frac{1}{f(t)}$

Déterminer une équation différentielle satisfaite par z, puis la résoudre (sur $\mathbb{R}_+$).

En déduire que pour tout réel t de $\mathbb{R}_+$, on a : $f(t) = \frac{1}{9e^{-at}+1}$.

2. On observe qu'au bout de 15 jours, la plante mesure 19 cm. Calculer a (on arrondira à 10^{-2} près).

3. Étudier la limite de f en $+\infty$ et préciser son sens de variation.

4. Représenter graphiquement la fonction f.

5. Au bout de combien de jours, la plante dépassera-t-elle 90 cm de haut ?

Exercice 6 : *Équation de Bernoulli*

Soient a et b deux nombres réels et n un entier naturel différent de 1.

On considère l'équation différentielle suivante : $(E) : y' = ay + by^n$.

On se propose, dans cet exercice, de rechercher les solutions strictement positives de (E) sur $\mathbb{R}$.

1. On pose sur $\mathbb{R}$: $z = y^{1-n}$ (ceci a bien un sens puisque y est strictement positif)
Déterminer une équation différentielle satisfaite par z et la résoudre.

2. En déduire les solutions, strictement positives, de (E) sur $\mathbb{R}$.
Que donne le cas $n = 0$?

Exercice 7 : *Équations du second ordre*

Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y'' - 2y' + y = 0$; $5y'' - 2y' - 3y = 0$; $2y'' - 2y' + 3y = 0$; $y'' + \omega y = 0$.

Exercice 8 : *Une équation du second ordre sans terme d'ordre nul*

Soient a et b deux nombres réels. On considère l'équation différentielle : $(E) : y'' = ay' + b$.

1. En posant $z = y'$, résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer qu'il existe une unique solution de (E) vérifiant les conditions $y'(0) = 0$ et $y(0) = 0$.

Exercice 9 : *Avec second membre variable*

On considère l'équation différentielle : $(E) : y' - 3y = \sin x$.

1. Résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation sans second membre associé : $(E_0) : y' - 3y = 0$.

2. Déterminer des réels a et b de sorte que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par : $p(x) = a\cos x + b\sin x$ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que f est une solution de (E) si et seulement si $f - p$ est une solution de (E_0).

4. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

5. Soit g la solution de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
Calculer $\int_0^{\pi} g(t)dt$.

Exercice 10 : *Une équation différentielle d'ordre 3*

On considère l'équation différentielle suivante : $(E) : y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

On note S l'ensemble des fonctions solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

1. Stabilité de *S*.

a. Démontrer que si f et g sont deux éléments de S alors $f + g$ est élément de S.

b. Démontrer que si f est élément de S et si λ est un réel alors λf est élément de S.

c. Démontrer que si f est élément de S, alors f' est élément de S.

2. Existence de solutions particulières

Démontrer que la fonction exponentielle est élément de S.

Qu'en est-il des fonctions $x \mapsto xe^x$ et $x \mapsto x^2e^x$?

3. Résolution de (*E*)

a. Soit g un élément quelconque de S. On définit alors une fonction f par : $f(x) = e^{-x}g(x)$.
Démontrer que l'on a : $f''' = 0$ sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire l'ensemble S.