Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2018-2019 **Lycée :** CDM (Saint-Louis)	**SÉRIE D'EXERCICES** **Dérivées et Primitives**	**Niveau** : TS1 **Professeur** : M. DiamBa

Exercice 1 :

1) Soit f une fonction définie dans un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et dérivable en a.
Calculer $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$.
2) Soit $f: I \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que : f croissante sur I $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \ \forall x \in I$.
3) Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que si f' a un extremum local en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors la courbe de f traverse sa tangente au point d'abscisse x_0. (Point d'inflexion.)

Exercice 2 :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1) Montrer que f est impaire et croissante sur $\mathbb{R}$.

2) a) En majorant $\frac{1}{1+x^2}$ sur $[0\,;\,1]$, montrer que $f(1) \leq 1$.

b) En remarquant que $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, montrer que f est majorée sur $[1\,;\,+\infty[$.

c) En utilisant 1) et 2), montrer que f admet une limite finie ℓ que l'on encadrera.

3) On pose pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $\quad g(x) = \tan x$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f o\, g(x) = \ell$.

b) Montrer que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $f o\, g(x) = x$. (On pourra dériver la fonction $x \mapsto f o\, g(x) - x$).

c) En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 3 :

1) Démontrer que l'équation $x^4 + x^3 - x + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer que pour tout $x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, $2\sin x + \tan x \geq 3x$ et $\frac{2}{\pi}x < \sin x \leq x$.

3) Soit $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$. Vérifier que : $2f'(x)\sqrt{1+x^2} = f(x)$.
En déduire que : $4f''(x)(1+x^2) + 4xf'(x) - f(x) = 0$.

4) a) Soit $f: x \mapsto \frac{1}{x-3}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f admet une dérivée d'ordre n en tout $x \neq 3$ et que : $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x-3)^{n+1}}$.

b) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \neq 3$, $\quad g(x) = \frac{2x^2-8}{x-3} = ax + b + \frac{c}{x-3}$.
En déduire la dérivée d'ordre n de la fonction g .

Exercice 4 :

1) Montrer que la fonction $f: x \mapsto \sin^2 x$ est bijective de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle à préciser.
Déterminer l'ensemble sur lequel f^{-1} est dérivable et calculer sa dérivée.

2) Montrer que la fonction g : $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ est bijective de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ vers un intervalle à préciser. Déterminer l'ensemble sur lequel la bijection réciproque g^{-1} est dérivable et calculer sa dérivée. **3)** Montrer que : $\forall\, x \in [-1\,;1]$, Arccos(-x)+Arccos(x)= π , Arcsin(x)+Arccos(x)= π/2 et $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

Exercice 5 :

On considère l'application $f :]0\,;2[\ \to\ \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$.

1) Montrer que f est une bijection de $]0\,;2[$ sur un intervalle que l'on précisera.

2) Soit h la bijection réciproque de f. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $h'(x) = \frac{2}{\pi(x^2+1)}$

3) Pour tout $x \neq 0$, on pose : $\varphi(x) = h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculer $\varphi'(x)$ et en déduire que φ est une constante sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$. Déterminer chacune de ces constantes.

Exercice 6 :

1) Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis aux fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle [0 ; x], montrer que : $1 - x^2 \leq \cos x \leq 1$.

2) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$, prouver que :

(i) pour tout $x \in [1\,;2]$, $|f(x) - x_0| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x - x_0|$, où x_0 est la solution de l'équation $f(x) = x$.

(ii) pour tout $x \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, $1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x}{2}$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3) Montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1-\alpha}{(k+1)^\alpha} \leq (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \leq \frac{1-\alpha}{k^\alpha}$ avec $\alpha \in]0\,;1[$.

Exercice 7 :

Soit f une fonction définie sur I=[a ;b] (a<b), deux fois dérivable sur I, telle que : $f(a) < 0 < f(b)$ et $f'' > 0$ sur I.

1) Montrer que f admet un unique zéro sur I, noté α. Monter que $f'(\alpha) > 0$.

2) En déduire que f est strictement croissante sur J=[α ;b].

Exercice 8 :

1) Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$ $b)\ f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$ $c)\ f(x) = \frac{4x+3}{(2x^2+3x+1)^3}$ $d)\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ $e)\ f(x) = \sin 2x - 2\cos 2x$ $f)\ f(x) = \sin x\ \cos^3 x$ $g)\ f(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ $h)\ f(x) = \tan^2 x$ $i)\ f(x) = \cos^3 x$ j) $f(x) = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ $k) f(x) = \tan x + \tan^3 x$ $l)\ f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ $m)\ f(x) = x^2\cos x + 2x\sin x$.

2) Déterminer la primitive F de f, vérifiant la condition indiquée :

a)$f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$; $F(2) = 0$ $b)\ f(x) = 3\sin\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}$; $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $c)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x+8}}$; $F(2) = 4$

3) Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que : $x^2 = a(x-1)^2 + b(x-1) + c$. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = x^2(x-1)^{2012}$.

4) Soit $f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 + 1}{x^2(x^2+1)^2}$. Déterminer deux réels a et b tels pour tout $x > 0, f(x) = \frac{ax}{(x^2+1)^2} + \frac{b}{x^2}$. En déduire une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 9 :

1) Déterminer une primitive sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ de la fonction $x : \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$.

2) On considère la fonction G, définie sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ par $G(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$. Montrer que G est dérivable sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ et que : $G'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

3) En déduire une primitive sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\cos^4 x}$.

Exercice 10 : (Fonction Arctangente)

Soient $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

1) Montrer que F est impaire.

2) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $G(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)$. En formant la dérivée de G, montrer que F admet une limite en $+\infty$ égale à 2F(1).

3) On considère la fonction U définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $U(t) = F(\tan t)$.

En calculant U'(t), trouver une expression simple de U(t). En déduire la valeur de F(1) puis représenter graphiquement la fonction F.

Exercice 11 : (Fonction logarithme népérien)

Soit F la primitive sur $]0\,;+\infty[$, qui s'annule en 1, de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

1) Montrer que : $F(x) > 0$ $pour\ x \in]1\,;+\infty[$ et $F(x) < 0$ $pour\ x \in]0\,;1[$.

2) On pose pour tout $x > 0$, $G(x) = F(ax)\ avec\ a > 0$. Montrer que G est une autre primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

3) En déduire que pour tous réels $x > 0$ et $a > 0$: $F(ax) = F(a) + F(x)\ puis\ F\left(\frac{x}{a}\right) = F(x) - F(a)$.