Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2017-2018 **Lycée :** CDM (Saint-Louis)	**SÉRIE D'EXERCICES** **CALCUL INTEGRAL**	**Niveau** : TS1 **Professeur** : M. DiamBa

Exercice 1:

1.) Effectuer la division euclidienne et en déduire une primitive de la fonction *f*.

$a)\ f(x) = \frac{2x^2-5x+6}{x-3}$ $\quad b)\ f(x) = \frac{2x^3-x^2+2}{x^3+1}$ $\quad c) f(x) = \frac{x^9-x^5+6x^4-1}{x^5-x+1}$.

2.) Déterminer les réels α et β annulant le dénominateur et décomposer *f*(*x*) sous la forme :

$f(x) = a + \frac{b}{x-\alpha} + \frac{c}{x-\beta}$ puis en déduire une primitive de *f*.

$a)\ f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ $\quad b)\ f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-x}$ $\quad c) f(x) = \frac{x+1}{x^2-x-3}$ $\quad d)\ f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-2x-8}$.

Exercice 2: Calculer l'intégrale donnée :

$\int_2^7 (x^3 - 7x + 15)dx$; $\int_{-1}^{0} \frac{2x+3}{(x^2+3x-1)^2} dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\, dt$; $\int_{-3}^{3} x^3 e^{x^2} dx$; $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x+1}$; $\int_2^1 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$;

$\int_0^2 \frac{x+1}{2x^2+4x+5} dx$; $\int_0^1 \frac{dv}{4-v^2}$; $\int_0^1 \frac{t^3-4t^2+2t+1}{t+1} dt$; $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan t\, dt$; $\int_0^2 (1-|x-1|)^3 dx$; $\int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt$;

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\cos^2 x + \sin^4 x) \sin x\, dx$; $\int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}}$; $\int_{-4}^{0} x\sqrt{x+4}\, dx$; $\int_0^2 \frac{\theta d\theta}{\sqrt{2-\theta}}$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{5-3\sin y} dy$;

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x \sin^3 x\, dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos 2t \cos 3t\, dt$; $\int_0^1 (x^2+1)e^x dx$; $\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$; $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos t)dt}{(t+\sin t)\ln(t+\sin t)}$

Exercice 3 : **(Les questions sont indépendantes)**

1. Soit *f* une fonction continue sur [0 ;1] telle que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

Montrer qu'il existe un point c de [0 ;1] tel que *f*(c) = c.

2. On considère les intégrales : $A = \int_0^x e^t \cos 2t\, dt$ et $B = \int_0^x e^t \sin 2t\, dt$.

À l'aide de la formule d'intégration par parties appliquée à A et à B, établir deux relations entre A et B. En déduire les valeurs de A et B.

3. Soit $F(x) = \int_0^x e^{3t} \sin 2t\, dt$. Prouver, en effectuant une double intégration par parties, que :

$F(x) = G(x) - \frac{4}{9}F(x)$, où G est une fonction que l'on déterminera. En déduire $F(x)$.

4. a) Déterminer les réels a et b tels que : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$. Calculer $I = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$.

b) En intégrant par parties, calculer $J = \int_1^2 \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx$.

5. a) Prouver que : $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos 2t\, dt = \frac{1}{4}$.

b) On pose L= $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \cos^2 t\, dt$ et K = $\int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2t} \sin^2 t\, dt$. Calculer L+K et L–K. En déduire L et K.

6. Déterminer la primitive F de la fonction $f : x \mapsto e^{-x}\cos x$, qui s'annule en 0.

7. On pose $g(x) = xf(x)$. Calculer $g'(x)$. En déduire l'intégrale I= $\int_e^{e^4} \left(\sqrt{\ln x} + \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\right) dx$.

Exercice 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x\, dx$.

1.Montrer que: $\forall\, x \in [0\,,1]$, $0 \leq x^n \sin \pi x \leq x^n$. En déduire la limite de I_n en $+\infty$. 2.

Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 I_n$.

Exercice 5 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$.

1.) Prouver qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x de $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, $\frac{1}{\cos x} = \frac{a\cos x}{1-\sin x} + \frac{b\cos x}{1+\sin x}$.

En déduire la valeur de I_0.

2.) Démontrer que $2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$. En déduire I_2.

Exercice 6 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+a} dx$, $a \in \mathbb{R}^* - \{-1\}$.

Calculer, en fonction de a, I_0 , I_1 et I_2. Montrer que $I_n = \frac{1}{n} - aI_{n-1}$. En déduire I_3.

Exercice 7 :

Soit f une fonction continue de [0 ;1] dans $\mathbb{R}$. On pose, pour tout n ≥1 :

$$I_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{x+n} dx \quad ; \quad J_n = \int_0^1 x^n f(x) dx \quad ; \quad K_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx} dx.$$

À l'aide de majorations de $|I_n|$, $|J_n|$ et $|K_n|$, montrer que les suites (I_n), (J_n) et (K_n) convergent vers 0.

Exercice 8 :

1.) Soit f une fonction continue sur [a ;b] dans $\mathbb{R}_+$ (a < b).

a) Montrer que si $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors f est identiquement nulle sur [a ;b].

b) Calculer $\int_{-5}^{5} (x^3 + x)e^{x^2} dx$.

2.) Soit f une fonction continue sur [a ; b] (a < b) telle que $\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \int_a^b |f(t)|dt$.

Montrer que f garde un signe constant sur [a ;b].

Exercice 9 :

Déterminer la limite de la suite (U_n) dans chacun des cas suivants :

$$a)\ U_n = \frac{1}{n^4}\sum_{k=0}^{n-1} k^3 \qquad b)\ U_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \qquad c)\ U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+2k)^3}$$

Exercice 10 :

Soit pour tout n∈$\mathbb{N}^*$,

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \qquad et \qquad u_n = \left(\frac{(2n)!}{n!\,n^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

1.) Montrer que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

2.) Déterminer $\ln u_n$ et prouver que (u_n) est convergente.

Exercice 11 : (BAC 2004)

Pour tout entier naturel n >1, on pose

$$U_n = 2 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

1.) Etablir que $\left|U_n - 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx\right| \le \frac{2}{2n+3}$.

2.) Soit J = $\int_0^1 \varphi(x)dx$ avec $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$. On désigne par F la primitive de φ nulle en 0 et soit G la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par G(V) = F(tanV).

a) Montrer que G est dérivable et déterminer sa dérivée G'. Quelle est la valeur de G ?

b) En déduire la valeur de J puis montrer que la suite (U_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 12 :

1.) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{1-x}^{1+x} f(t)dt$.

2.) Déterminer les ensembles de définition et étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$a)\ f(x)=\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt \qquad b)\ g(x)=\int_x^{x^2+x} e^{1/t}dt.$$

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\int_x^{2x}\frac{\cos t}{t}dt$.

1.) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^*$ puis que f est paire.

2.) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(x)=\ln 2+\int_x^{2x}\frac{\cos t-1}{t}dt$.

Déduire que l'on peut prolonger f par continuité en 0. Le prolongement obtenu est-il dérivable en 0 ?

3.) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ f(x)=\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{\sin x}{x}+\int_x^{2x}\frac{\sin t}{t^2}dt$. Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4.) Etudier les variations de f sur $[-\pi\,;\pi]$.

Exercice 14 :

1.) Montrer que la fonction $f: x\mapsto\int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire.

2.) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer f' et étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$. On montrera que la limite de f en $+\infty$ est égale à 0.

3.) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. $\left(f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Exercice 15 :

1.) Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), l'unité de longueur étant 5cm. Soit (P) la parabole d'équation : $y = x^2$ et (P') la parabole d'équation : $y = -x^2 + 4x + 8$. Calculer l'aire du domaine D compris entre (P) et (P').

2.) Soit h et R des réels tels que $0 < h < R$. L'espace est rapporté à un repère orthonormal (O, I, J, K). Calculer le volume de la partie D, ensemble des points M dont les coordonnées (x, y, z) vérifient :
$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ et $z \geq h$.

Exercice 16 :

Soit la suite (I_n) définie par $I_n=\int_0^1\frac{x^n\ln x}{1+x^2}dx$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

1.) Justifier l'existence de I_n.

2.) Soit la fonction f définie sur $]0\,;1]$ par $f(x) = x\ln x$. Montrer que : $\forall x\in]0;1],\ |f(x)|\leq\frac{1}{e}$.

3.) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |I_n|\leq\frac{1}{ne}$. Démontrer que (I_n) est convergente.

Exercice 17 : (Intégrales de Wallis)

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx \quad et \quad J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$.

1.) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n=J_n$. Montrer que la suite (I_n) est positive et décroissante.

2.) Au moyen d'une intégration par parties, établir une relation entre I_n et I_{n+2}. En déduire une expression explicite de I_n. Montrer aussi que pour tout n, $(n+1)I_{n+1}I_n=\frac{\pi}{2}$.

3.) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}=1 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} n{I_n}^2=\frac{\pi}{2}.$$

4.) On pose $P_n=\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\ldots\times\frac{2n}{2n-1}\times\frac{2n}{2n+1}$.

Vérifier que $P_n=\frac{\pi}{2}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

Exercice 18 :

Soit la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$. En déduire que $I_n = \frac{2^{2n+2} n!(n+1)!}{(2n+3)!}$.

Exercice 19 :

1.) Soit f et g deux fonctions continues sur $[a\,;b]$ et λ un nombre réel quelconque. Mettre l'intégrale $\int_a^b [f(t) + \lambda \mathrm{g}(t)]^2 dt$ sous la forme d'un polynôme en λ ordonné suivant les puissances décroissantes de λ.

En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwartz : $\left[\int_a^b f(t)\mathrm{g}(t)\mathrm{dt}\right]^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \,.\int_a^b \mathrm{g}^2(t)dt$.

2.) Montrer que pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$, $\sqrt{ab}\ln\frac{b}{a} \leq b - a$.

3.) Soit f : [a ;b] →]0 ;+∞[continue. Montrer que : $(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)\left(\int_a^b \frac{dt}{f^2(t)}\right)$.

4.) Soit f une fonction dérivable sur [a ;b] avec a < b , f(a) = 0 et telle que f ' soit continue sur [a ;b].

a) Montrer que : $\forall x \in [a\,;b],\ [f(x)]^2 \leq (x-a)\int_a^b f'^2(t)dt$.

b) Montrer que : $\forall\, x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right],\ \sin^2 x \leq \frac{\pi}{4}x$.

C.I.A.M p. 319-320, Exercices N° 52-53-54-55.

Problème 1 :

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On définit la fonction F sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t}dt$.

1.) Montrer que F est dérivable puis calculer F'(x).

2.) Définir F dans les cas suivants : $a)\ f(t) = \frac{1}{t}$ $\quad b)\ f(t) = 1$.

3.) On étudie le cas où $f(t) = \cos t$ [on ne cherche pas à calculer F(x)].

  a) Déterminer les signes de $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

  b) Montrer que $\forall\, t \in \mathbb{R}_+^*,\ \left|\frac{f(t)}{t}\right| \leq \frac{1}{t}$ et que $|F(x)| \leq \ln 3$.

  c) Démontrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln 3 - F(x) = 2\int_x^{3x} \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t}dt$ et que $0 \leq \ln 3 - F(x) \leq 2x^2$. En déduire que F admet une limite à droite en 0.

4.) Soit G la fonction définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ G(x) = F(x)\ et\ G(0) = \ln 3$.

  a) En utilisant une intégration par parties, établir que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \left|G(x) - \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x}\right| \leq \frac{2}{3x}$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |G(x)| \leq \frac{2}{x}$ puis étudier la limite de G en +∞.

  b) Démontrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ G'(x) = \frac{-4\sin^2 x\cos x}{x}$.

  c) Etudier les variations de G sur $\left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. En déduire que G admet un zéro sur $\left]\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Problème 2 :

Partie A :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$.

1.) Justifier que f est définie sur ℝ, puis que f est impaire.

2.) Montrer que f est bijective et que $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

3.) Montrer que $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Partie B :

On pose $g_0 : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g_n : \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$.

1.) Représenter graphiquement, sur un plan rapporté à un repère orthonormé d'unité 2cm les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ représentatives de g_0, g_1, g_2.

2.) Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

3.) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^1 g_n(x)dx$. Calculer u_1.

4.) Montrer que : $\forall\, n \geq 2,\ \ n\, u_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$. (On pourra utiliser une intégration par parties). En déduire u_2 et u_3.

5.) Montrer que pour tout x de [0 ;1], $0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$. Trouver la limite de la suite (u_n).

Partie C :

1.) Pour tout entier naturel n, on appelle h_n la restriction de g_nà [0 ;1]. Montrer que h_n définit une bijection de [0 ;1] sur un intervalle que l'on précisera.

2.) Ecrire explicitement les fonctions h_0^{-1}, h_1^{-1} et h_2^{-1}.

3.) Etudier et représenter graphiquement ces trois fonctions sur le même plan que $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$.