Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2017-2018 **Lycée :** CDM (Saint-louis)	**SÉRIE D'EXERCICES** **PGCD-PPCM-NOMBRES PREMIERS**	**Niveau** : TS1 **Professeur** : M. DiamBa

Exercice 1 :

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$.

1) Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par n- 4.

2) On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note $d = PGCD(\alpha, \beta)$.

a) Etablir une relation entre α et β indépendante de n.

b) Démontrer que d est un diviseur de 5.

c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si n – 2 est un multiple de 5.

3) Montrer que 2n + 1 et n sont premiers entre eux.

4) a) Déterminer suivant les valeurs de n le PGCD de a et b.

b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers n = 11 et n = 12.

Exercice 2 :

On pose $a = 11n + 3$ et $b = 13n - 1$, où n est un entier naturel non nul.

1) Démontrer que tout diviseur de a et de b est un diviseur de 50.

2) Résoudre pour $x \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{N}^*$, l'équation $50x - 11y = 3$.

En déduire les valeurs de n pour lesquels pgcd(a, b) = 50.

3) Pour quelles valeurs de n, pgcd(a, b) = 25 ?

Exercice 3 :

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_1) : 11x + 8y = 79$.

Um :! Montrer que si (x, y) est solution de (E_1) alors $y \equiv 3\ [11]$. Résoudre alors (E_1).

2) Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_2) : 3y + 11z = 372$.

Montrer que si (y, z) est solution de (E_2) alors $z \equiv 0\ [3]$. Résoudre alors (E_2).

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E_3) : 3x - 8z = -249$.

4) Le prix total de 41 pièces détachées reparties en trois lots est de 480 euros.

Le prix d'une pièce du premier lot est de 48 euros ; le prix d'une pièce du deuxième lot est de 36 euros ; le prix d'une pièce du troisième lot est de 4 euros.

Déterminer le nombre de pièces de chaque lot.

Exercice 4 :

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009 ; c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009\ [10000]$.

PARTIE A

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.

2) En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009$ [16].

PARTIE B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2009^2 - 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (1 + u_n)^5 - 1$.

1) a) Démontrer que u_0 est divisible par 5.

b) Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n[u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)]$.

c) Démontrer par récurrence que pour tout entier n, u_n est divisible par 5^{n+1}.

2) a) Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1$ [625].

b) Démontrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009$ [625].

PARTIE C

1) En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10000.

2) Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.

Exercice 5 :

On considère la fraction $\frac{n^3+n}{2n+1}$ avec n un entier positif.

1) Prouver que tout diviseur commun d à 2n + 1 et $n^3 + n$ est premier avec n.
2) Déduisez-en que d divise $n^2 + 1$ puis que d = 1 ou d = 5.
3) Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles la fraction est réductible ?

Exercice 6 :

1) On considère l'ensemble $A_7 = \{1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6\}$.

a) Pour tout élément a de A_7, écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1$ [7].

a	1	2	3	4	5	6
y						

b) Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5$ [7] équivaut à $x \equiv 4$ [7].

c) Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0$ [7] sont les multiples de 7.

2) Dans toute cette question p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble $A_p = \{1 ; 2 ; \dots ; p - 1\}$ des entiers naturels non nuls strictement inferieurs à p. Soit a un élément de A_p.

a) Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1$ [p].

b) On note r le reste de la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution dans A_p de l'équation $ax \equiv 1$ [p].

c) Soient x et y deux entiers relatifs.
Démontrer que : $xy \equiv 0$ [p] si et seulement si $x \equiv 0$ [p] ou $y \equiv 0$ [p].

d) **Application** : p = 31.
Résoudre dans A_{31} les équations : $2x \equiv 1$ [31] et $3x \equiv 1$ [31].
A l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$: $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0$ [31].

EXERCICES, CIAM

- **Page 29 : 34, 37, 38, 39, 48**
- **Page 30 : 53, 54, 59, 60, 64, 65, 72**
- **Page 32 : 83, 85.**