Axlou Toth pour l'Innovation

Année Scolaire : 2015-2016 **Lycée :** LPAC (Saint-Lousi)	**DEVOIR NO** **(1er Semestre)**	**Niveau** : TS1 **Professeur** : M. Ndiaye

EXERCICE 1 : (5 points)

On considère un cube ABCDEFGH. On note I et J les centres de gravité respectifs des triangles CFH et AFH.

1. Déterminer le plan médiateur de [AC]. **0,5 pt**
2. Déterminer l'intersection des plans (ABG) et (BCH). **0,5 pt**
3. Montrer que les droites (BE) et (DF) sont orthogonales. **0,5 pt**
4. a) Quelle est la nature du triangle CFH ? **0,25 pt**
   b) Prouver que les points A, G et I appartiennent au plan médiateur de [CF]. **0,75 pt**
   c) En déduire que (AG) est orthogonale au plan (CFH) et qu'elle passe par I. **0,5 pt**
5. Montrer que (CE) est orthogonale au plan (AFH) et qu'elle passe par J. **1 pt**

EXERCICE 2 : (5 points)

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3^{2n}-1$ est divisible par 8.
En déduire que $3^{2n+2}+7$ et $3^{2n+4}-1$ sont des multiples de 8.

2) Déterminer les restes de la division euclidienne par 8 des puissances de 3.

3) Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre A_p défini par :
$A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p} + 3^{4p}$.
a) Si $p = 2n$, alors quel est le reste de la division euclidienne de A_p par 8 ?
b) Démontrer que, si $p = 2n+1$, alors A_p est divisible par 8.

4) On considère les nombres a et b écrits dans le système de base 3 :
$a = \overline{1110}^{\,3}$ et $b = \overline{101010100}^{\,3}$.
Les nombres a et b sont-ils divisibles par 8 ?

5) De même, on considère le nombre $c = \overline{2002002002000}^{\,3}$.
Démontrer que c est divisible par 16.

EXERCICE 3 : (5 points)

Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 1$.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \,;\, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \alpha\, u_{n+1} + (1-\alpha)u_n \ ,\forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Démontrer que pour tout entier naturel n, u_{n+2} est compris entre u_n et u_{n+1}.
2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = u_n - u_{n+1}$.
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique convergente.
3) Calculer, en fonction de n, la somme $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.
4) En déduire la limite de la suite (u_n).

PROBLEME : **(10 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour m réel, on considère la famille de fonctions f_m définie par :

$$f_m(x) = x + \ln\sqrt{x^2 + mx + 1}.$$

On note (C_m) la courbe représentative de f_m.

PARTIE A

1. Pour m = 2, étudier les variations de f_m et construire (C_m). **1,25 pt**

2. Déterminer l'ensemble des valeurs de m noté V_m pour que f_m soit définie sur $\mathbb{R}$. **0,5 pt**

3. Montrer que toutes les courbes (C_m) des fonctions f_m passent par un même point fixe A dont on déterminera les coordonnées. **0,5 pt**

4. Pour m = 0, on considère la fonction f_0.

   a) Etudier les variations de la fonction f_0. **1 pt**

   b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_0 sur son ensemble de définition. **0,5pt**

5. a) Montrer que la courbe (C_0) de f_0 admet deux points d'inflexion dont on donnera leurs coordonnées. **0,5 pt**

   b) Etudier les branches infinies de (C_0) ; tracer la courbe (C_0) dans le même repère orthonormé. **1,25 pt**

PARTIE B

1. Soit la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\ln(x^2 + 1).$$

   a) Quel est le domaine de définition de F ? **0,25 pt**

   b) Montrer que l'on a :

$$F'(x) = f_0(x) + \frac{x^2}{x^2+1}.$$ **0,5 pt**

   c) Soit h une primitive de la fonction U telle que $U(x) = \frac{1}{x^2+1}$ et qui vérifie $h(0) = 0$ et $h(1) = \frac{11}{4}$. Soit F_0 une primitive de f_0. Calculer $F_0(1) - F_0(0)$. **0,75 pt**

2. Pour $m \in V_m$, on considère la droite (D_m) d'équation $y = x + m$.

   a) Montrer que pour tout m de V_m et $m > 0$, l'intersection de (C_m) et (D_m) contient toujours deux points dont on donnera les coordonnées ; on les notera M_m et M_m'. **1 pt**

   b) Montrer que les points M_m et M_m' sont symétriques par rapport à une droite (D) dont on précisera l'équation. **0,75 pt**

   c) Que se passe t-il si on fait tendre m vers 0 ? **0,25 pt**